Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 5

УДК 513.836 *МАТЕМАТИКА*

Г. Г. КАСПАРОВ

О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПОНТРЯГИНА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 1 VII 1969)

В работе исследуется вопрос о гомотопической инвариантности рациональных чисел Понтрягина замкнутых гладких (PL-) многообразий. Рассматриваются числа Понтрягина вида

$$\langle L_k(M^n)\, y_1 \ldots y_{n-4k},\ [M^n]\rangle, \quad \text{где } y_1, \ldots, y_{n-4k} \in H^1(M^n).$$

Для них доказана гомотопическая инвариантность (теорема 1). Впервые гомотопическая инвариантность чисел Понтрягина такого вида исследовалась в работах ([4–6]). Оказывается, других соотношений гомотопической инвариантности рациональных чисел Понтрягина для многообразий со свободной абелевой фундаментальной группой не существует (см. часть II).

I. Теорема 1. *Пусть M^n — замкнутое ориентированное гладкое (или PL-) многообразие размерности n. Рассмотрим в группе $H_{n-1}(M^n)$ произвольные элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{n-4k}$. Тогда скалярное произведение $\langle L_k(M^n)$, $\xi_1 \circ \ldots \circ \xi_{n-4k}\rangle$ гомотопически инвариантно (здесь $L_k(M^n)$ — полином Хирцебруха от классов Понтрягина многообразия M^n, $\xi_1 \circ \ldots \circ \xi_{n-4k}$ — пересечение циклов $\xi_1, \ldots, \xi_{n-4k}$).*

Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — гомотопическая эквивалентность степени $+1$ связных замкнутых ориентированных гладких многообразий размерности n. Рассмотрим неделимый элемент $z \in H_{n-1}(M^n)$ и накрытие $\hat{M}_z$ над M^n, определенное нормальным делителем $\pi \subset \pi_1(M^n)$, в который входят те и только те элементы $\pi_1(M^n)$, образ которых при естественном гомоморфизме $\pi_1(M^n) \to H_1(M^n)$ имеет нулевой индекс пересечения с циклом z. Над N^n рассмотрим накрытие $\hat{N}_{f_*(z)}$, построенное аналогичным образом по элементу $f_*(z) \in H_{n-1}(N^n)$. Накрывающее отображение $\hat{M}_z \to \hat{N}_{f_*(z)}$ обозначим через h. Пусть W^{n-1} — произвольное связное подмногообразие N^n, реализующее цикл $f_*(z)$. Очевидно, существует накрывающее вложение $W^{n-1} \subset \hat{N}_{f_*(z)}$.

Теорема 2*. *Если $\pi_1(M^n)$ свободная абелева, $\pi_1(W) \to \pi_1(N_{f_*(z)})$ — мономорфизм, $n \geqslant 6$, то существует отображение $h_0\colon \hat{M}_z \to \hat{N}_{f_*(z)}$, гомотопное h, t-регулярное на W^{n-1} и индуцирующее гомотопическую эквивалентность подмногообразий $V_0^{n-1} = h_0^{-1}(W^{n-1})$ и W^{n-1}.*

Замечание 1. Доказательство этой теоремы повторяет основные этапы доказательства теоремы 3 работы ([5]). Отличие состоит в том, что вместо ядер отображений в гомологиях на универсальных накрытиях при вложении подмногообразия в правую и левую части объемлющего открытого многообразия в доказательстве теоремы 2 используются соответственно ядра отображения h_* в гомологиях на универсальных накрытиях правой и левой частей по модулю делящего многообразия.

Замечание 2. Теорема 2 остается в силе и для многообразий с краем, причем, если $V^{n-1} = h^{-1}(W^{n-1})$ таково, что на ∂V^{n-1} отображение h уже является гомотопической эквивалентностью, то V_0^{n-1} можно выбрать так, что $\partial V_0^{n-1} = \partial V^{n-1}$.

* *Примечание при корректуре.* Как стало известно автору, эта теорема была анонсирована в значительно более сильной формулировке в работе ([10]).

З а м е ч а н и е 3. По аналогии с ([3]) можно реализовать V_0^{n-1} внутри самого многообразия M^n, т. е. существует отображение $f_0\colon M^n \to N^n$, гомотопное f, t-регулярное на W^{n-1} и индуцирующее гомотопическую эквивалентность подмногообразий $V_0^{n-1} = f_0^{-1}(W^{n-1})$ и W^{n-1}.

Сначала выведем из теоремы 2 теорему 1. Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — гомотопическая эквивалентность гладких многообразий (случай PL-многообразий полностью аналогичен), $\xi_1, \ldots, \xi_{n-4k} \in H_{n-1}(M^n)$. Очевидно, утверждение теоремы 1 достаточно доказать при условии, что $\pi_1(M)$ абелева, так как коммутант можно уничтожить перестройками, не нарушив гомотопической эквивалентности. Переходом к конечнолистным накрытиям сводим задачу к случаю свободной абелевой фундаментальной группы. Будем предполагать, что $\xi_1 \circ \ldots \circ \xi_{n-4k}$ — свободный элемент в $H_{4k}(M)$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Далее доказательство идет по индукции. Укажем первый шаг. Заменяя при необходимости элемент ξ_1 неделимым элементом z_1, реализуем $f_*(z_1)$ подмногообразием $W^{n-1} \subset \hat{N}_{f*(z_1)}$, где $\pi_1(W) \to \pi_1(\hat{N}_{f*(z_1)})$ — мономорфизм. Применяя теорему 2, получаем гомотопическую эквивалентность $h_0 ; V_0^{n-1} \to W^{n-1}$. Далее применяем теорему 2 к циклу $\xi_2 \cap V_0^{n-1} = z_2 \in \hat{H}_{n-2}(V_0^{n-1})$ и т. д. Рассуждение не проходит при $k = 1$, когда на последнем шаге получаем гомотопическую эквивалентность $f\colon M^5 \to N^5$ и теорема 2 не применима. В этом случае утверждение вытекает из теоремы 1 работы ([4]).

Дадим теперь набросок доказательства теоремы 2. Обозначим $h^{-1}(W)$ через V. Легко показать, что W делит $\hat{N}_{f*(z)}$ на 2 части K и L. Значит, V делит $\hat{M}_z$ на 2 части $A = h^{-1}(K)$ и $B = h^{-1}(L)$. Обозначим отображение $h|_V\colon V \to W$ через g. Из рассуждений § 4 работы ([5]) и конечнопорожденности $H_1(\hat{N}_{f*(z)}) = \pi_1(\hat{N}_{f*(z)})$ следует, что $\pi_1(W) \to \pi_1(\hat{N}_{f*(z)})$ — изоморфизм.

Будем последовательно перестраивать V^{n-1} внутри $\hat{M}_z$, уничтожая ядра отображения g_* и соответствующим образом изменяя отображение h при каждой перестройке. При перестройках будут использоваться только диски из ядер отображений $h_*\colon \pi_i(A, V) \to \pi_i(K, W)$ и $h_*\colon \pi_i(B, V) \to \pi_i(L, W)$. Легко сделать V связным. Далее, используя конструкцию Браудера ([1]), можно перестройками указанного вида добиться, чтобы g_* стало изоморфизмом на π_1. Получим $\pi_1(\hat{M}_z) = \pi_1(\hat{N}_{f*(z)}) = \pi_1(V) = \pi_1(W) = \pi_1(A) = \pi_1(B) = \pi_1(K) = \pi_1(L)$.

Следуя ([8]), будем обозначать ядра отображений в i-мерных гомологиях на универсальных накрывающих через K_i, а коядра в компактных когомологиях — через $K_c{}^i$. Группы K_i, $K_c{}^i$ являются модулями над групповым кольцом $\mathbf{Z}(\pi)$. В ([8]) доказано, что для многообразий (с краем и без края) K_i и $K_c{}^i$ выделяются прямыми слагаемыми в соответствующих группах гомологий и когомологий, и для них сохраняются все точные последовательности пар и троек, а также имеет место двойственность Пуанкаре. Нам понадобится также точная последовательность пары $(\hat{M}_z, V)$ для групп K_i и некоторые другие, которые получаются совершенно аналогично.

Имеем $K_i(\hat{M}_z) = 0$, $K_1(V) = 0$. Из точной последовательности пары $(\hat{M}_z, V)$ получаем $K_i(V) = K_{i+1}(\hat{M}_z, V)$. Это дает необходимое нам прямое разложение: $K_i(V) = K_{i+1}(A, V) \oplus K_{i+1}(B, V)$, причем $K_2(A, V) = K_2(B, V) = 0$. Можно показать (используя методы работы ([2])), что если $K_j(A, V) = 0$, $K_j(B, V) = 0$ при $j \leqslant i$, то любой элемент из $K_{i+1}(A, V)$ реализуется таким отображением пар $(D^{i+1}, S^i) \to (A, V)$, что сквозное отображение $(D^{i+1}, S^i) \to (A, V) \to (K, W)$ есть 0 в группе $\pi_{i+1}(K, W)$. При $i \leqslant [(n-1)/2]$ существует гомотопное отображение, являющееся гладким вложением (доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 из ([5]) с заменой условия $\pi_2(A, V) = 0$ на $K_2(A, V) = 0$). Это позволяет произвести все перестройки в размерностях $i < [(n-1)/2]$. При $n - 1 = 2m$ из двойственности Пуанкаре получаем, что только $K_m(V) \neq 0$. Поэтому $K_m(V)$ стабильно свободен над $\mathbf{Z}(\pi)$, а значит, модули $K_{m+1}(A, V)$ и $K_{m+1}(B, V)$ стабильно свободны ($\pi = \mathbf{Z} + \ldots + \mathbf{Z}$).

При $n - 1 = 2m + 1$ заклеиваем также $K_{m+1}(B, V)$. После этого будут отличны от 0 только $K_{m+1}(A, V)$ и $K_{m+2}(B, V)$. По аналогии с доказательством леммы 6.1 из ([5]) докажем проективность этих модулей. Обозначим через T образующую группы $\mathbf{Z}$ движений накрытия $\hat{M}_z$. Тогда при достаточно большом s $T^sA \subset A$ и гомоморфизмы вложения $K_m(B) \to K_m(T^sB)$, $K_{m+1}(T^sA) \to K_{m+1}(A)$ тривиальны. Обозначим $\overline{A \setminus T^sA}$ через Q. Пусть $Q \cap T^sA = V'$, $Q \cap B = V$. Из точных последовательностей троек $(\hat{M}_z, A, T^sA)$, $(\hat{M}_z, T^sB, B)$ для многообразия Q получим, что $K_i(Q, V) = 0$ $(i \neq m,\ m+1)$, $K_m(Q, V) = K_{m+1}(Q, V) = K_{m+1}(A, V)$, а также $K_i(Q, V') = 0$ $(i \neq m+1,\ m+2)$, $K_{m+1}(Q, V') = K_{m+2}(Q, V') = K_{m+2}(B, V)$. Отсюда в полной аналогии с § 6 работы ([5]) получаем проективность $K_{m+1}(A, V)$ и $K_{m+2}(B, V)$. Теперь ядра $K_{m+1}(A, V)$ при $n - 1 = 2m$ и при $n - 1 = 2m + 1$ уничтожаются совершенно так же, как в ([5]). Получаем такое подмногообразие $V_0 \subset \hat{M}_z$, что $K_i(V_0) = 0$ для всех i. Теорема 2 доказана.

II. Далее мы будем предполагать, что все рассматриваемые многообразия имеют свободную абелеву фундаментальную группу. В работе ([7]) чисто геометрически построены гомоморфизмы α: $L_n(\pi \times \mathbf{Z}) \to L_{n-1}(\pi)$ и β: $\operatorname{Ker} \alpha \to L_n(\pi)$, где $L_n(\pi)$ — группа Уолла препятствий к перестройкам для многообразий размерности n с фундаментальной группой π (см. ([9])). Рассмотрим отображение f: $(M^n, \nu) \to (X^n, \xi)$, где M^n и X^n — гладкие многообразия, ξ — стабильный пучок над X^n, ν — стабильный нормальный пучок к M^n, $\deg f = +1$, $\pi_1(M^n) = \pi_1(X^n) = \pi \times \mathbf{Z}$, $n \geqslant 6$. Тогда f определяет некоторый элемент $[f] \in L_n(\pi \times \mathbf{Z})$. Рассмотрим произвольное подмногообразие $Y^{n-1} \subset X^n$ такое, что $\pi_1(Y^{n-1}) = \pi \subset \pi_1(X^n)$ (в работе ([7]) $X^n = Y^{n-1} \times S^1$). Обобщая конструкцию ([7]) на рассматриваемый случай, определяем $\alpha([f]) = [f|_N\colon (N^{n-1}, \nu|_N) \to (Y^{n-1}, \xi|_Y)]$, а также в полной аналогии с ([7]) и гомоморфизм β. Корректность ($\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$) обеспечивается теоремой 2. Можно сделать предположение, что α и β не зависят от выбора X^n, т. е. являются универсальными. Автор не располагает доказательством этого факта, однако универсальность α и β влечет за собой интересные следствия, которые мы здесь приведем. Эти следствия указаны автору С. П. Новиковым.

1. *Пусть M^n — замкнутое гладкое ориентированное многообразие, $\pi_1(M^n)$ — свободная абелева, η — стабильный пучок над M^n, ν — стабильный нормальный пучок к M^n. Если пучок η удовлетворяет условиям: $J(\eta) = J(\nu)$ и $\langle L_k(\eta), \xi_1 \circ \ldots \circ \xi_{n-4k} \rangle = \langle L_k(\nu), \xi_1 \circ \ldots \circ \xi_{n-4k} \rangle$ для любых $\xi_1, \ldots, \xi_{n-4k} \in H_{n-1}(M^n)$, то препятствие к существованию многообразия N^n, гомотопически эквивалентного M^n и имеющего стабильный нормальный пучок η, имеет конечный порядок в группе $L_n(\pi_1(M^n))$.*

2. *Для многообразий со свободной абелевой фундаментальной группой рациональные классы Понтрягина не связаны никакими другими соотношениями гомотопической инвариантности, кроме соотношений, указанных в теореме 1.*

3. *Пусть M^n — замкнутое гладкое ориентированное многообразие, $\pi_1(M^n)$ — свободная абелева, η — стабильный пучок над M^n. Для конечности числа гладких многообразий гомотопического типа M^n со стабильным нормальным пучком η необходимо и достаточно, чтобы естественное отображение*

$$\Lambda^{n-4q-1} H^1(M^n) \to H^{n-4q-1}(M^n)$$

было мономорфизмом для любого $q \geqslant 0$.

Доказательства этих предложений вытекают из следующего способа вычисления препятствия, лежащего в $L_n(\mathbf{Z}^k)$. Пусть, как и выше, f: $(M^n, \nu) \to (X^n, \xi)$, $\pi_1(X) = \mathbf{Z}^k$. Рассмотрим свободный базис $\xi_1, \ldots, \xi_k$ в группе $H_{n-1}(X^n)$. Пусть $\xi_{i_1} \circ \ldots \circ \xi_{i}$ — свободный элемент в группе

$H_{n-q}(X^n)$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_q)$. Реализуем его таким подмногообразием $Y^{n-q} \subset X^n$, что $\pi_1(Y^{n-q}) \subset \pi_1(X^n)$. Тогда, рассматривая $N^{n-q} = f^{-1}(Y^{n-q})$ и $f|_N$: $(N^{n-q}, \nu|_N) \to (Y^{n-q}, \xi|_Y)$, получаем препятствие $\alpha^q([f]) = \alpha \circ \ldots \circ \alpha([f]) \in L_{n-q}(\mathbf{Z}^{k-q})$. Далее, при $n - q \equiv 0 \pmod 4$ существует естественный гомоморфизм γ: $L_{n-q}(\mathbf{Z}^{k-q}) \to L_{n-q}(1)$ — сигнатура матрицы препятствия, деленная на 8. Таким образом, для набора $i_1 < \ldots < i_q$ при $n - q \equiv 0 \pmod 4$ получаем некоторое число (элемент $L_{n-q}(1)$), причем элемент $[f] \in L_n(\mathbf{Z}^k)$ имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда все полученные числа равны 0. Последнее утверждение вытекает из универсальности α и β и из работы ([7]).

В заключение автор приносит благодарность С. П. Новикову за многочисленные советы и обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Browder, Proc. Cambr. Phil. Soc., 61, № 2, 337 (1965). [2] M. Demazure, Séminaire H. Cartan, année 11, 1, exposé 4 (1958—1959). [3] F. T. Farrell, Bull. Am Math. Soc., 73, № 5, 737 (1967). [4] С. П. Новиков, Изв. АН, СССР, сер. матем., 29, № 6, 1373 (1965). [5] С. П. Новиков, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 1, 207 (1966). [6] В. А. Рохлин, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 3, 705 (1966). [7] J. L. Shaneson, Bull. Am. Math. Soc., 74, № 3, 467 (1968). [8] C. T. C. Wall, Ann. Math., 84, № 2, 217 (1966). [9] C. T. C. Wall, Surgery of Non-Simply-Connected Manifolds. Liverpool, 1967. [10] F. T. Farrell, W. C. Hsiang, Bull. Am. Math. Soc., 74, № 3 (1968).