Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 5

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. А. КОНДРАТЬЕВ, С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 VII 1969)

В заметках ([1,2]) были изложены результаты изучения решений линейных эволюционных систем любого порядка с переменными коэффициентами, пространственная часть которых является эллиптической по Петровскому системой порядка m, а дифференцирование по временной координате t имеет максимальный порядок меньший m. О решениях предполагалось, что их составляющие, не содержащиеся в некотором конусе K N-мерного комплексного пространства C^N, имеют равномерно ограниченную L_1-норму. Для таких решений устанавливались неравенства типа L_1-неравенств Гарнака, из которых выводились предложения о характере роста решений в простейших областях. Из этих предложений следовали уточнения и обобщения классических теорем единственности решения задачи Коши, Уиддера и Тэклинда.

Более детальный анализ средств, с помощью которых такие теоремы доказываются, привели к установлению совершенно новых теорем единственности решения задачи Коши для л ю б ы х линейных эволюционных систем с переменными коэффициентами, разрешенных относительно производных по временной координате t. Предполагается, что решение лежит в конусе и удовлетворяет определенной L_1-оценке. Доказательство основано на специальной лемме (лемма 1) о возможности L_1-оценки с весом в слое малой высоты части решения, лежащего в конусе. Для решений систем с эллиптической пространственной частью нужная дополнительно L_1-оценка получается автоматически.

Для систем с постоянными коэффициентами, имеющими эллиптическую пространственную часть, и параболических по Петровскому систем с переменными растущими коэффициентами получены весьма полные, в определенном смысле окончательные, результаты. Для параболических по Петровскому уравнений с весом вида $2(2\nu+1)$, ν — целое число, доказывается теорема о совпадении двух решений при ограничениях на их компоненты, не принадлежащие конусу.

Изложению этих результатов и посвящена настоящая статья. Обозначения и определение такие же, как в ([2]).

1. П р о и з в о л ь н ы е   л и н е й н ы е   э в о л ю ц и о н н ы е   с и с т е м ы. Рассмотрим систему

$$\mathscr{L}\left(t,\ x;\ \frac{\partial}{\partial t},\ D_x\right)u \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + P(t,\ x;\ D_x)\,u \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|k|\leqslant m} A_k(t,\ x)\,D_x^k u = 0 \qquad (1)$$

без каких-либо предположений о типе матрицы P.

Предполагается выполненным

У с л о в и е α. $m > 1$, коэффициенты оператора $P^*(t,\ x;\ D_x)$, сопряженного по Лагранжу к $P(t, x; D_x)$, $A_k^*(t, x)$ обладают свойством: $A_k^*(t,\ x)\,|x|^{(|k|-m)/(m-1)}$ ограничены постоянной A в слое $\Pi^{\infty}_{(0,\ T)} = \Pi_T$ (при $|x| \leqslant 1$ степенной множитель отсутствует).

Теорема 1. *Пусть решение $u(t, x)$ системы* (1) (*удовлетворяющей условию* α) *в* Π_T *непрерывно в* $\overline{\Pi}_T$ *и удовлетворяет условиям:* 1) $u \in K$, K — *конус в комплексном пространстве* C^N, *замыкание которого имеет лишь одну общую точку (начало координат) с некоторым полупространством;* 2) $\|u(t, x)\|_{\Pi^{2, x^0}_{(0, T)}} \leqslant C \exp\{c|x^0|^{m'}\}$, $m' = \frac{m}{m-1}$, $\Pi^{2, x^0}_{(0, T)} \subset \Pi_T$; 3) $u|_{t=T} = 0$. *Тогда* $u(t, x)$ *тождественно равно нулю в* Π_T.

Теорема 1 следует из такой основной леммы.

Лемма 1. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условию* α, *решение* $u(t, x)$ — *условию* 2) *теоремы* 1. *Тогда найдутся положительные постоянные* Q *и* t_0, *зависящие лишь от* A, *такие, что*

$$\iint\limits_{\Pi_{t_0}} |u^+(t, x)| \exp\left\{-\frac{2c|x|^{m'}}{(1+Qt)^{1/(m-1)}}\right\} dt\, dx \leqslant$$

$$\leqslant K(A) \left(\iint\limits_{\Pi_{t_0}} |u^-(t, x)| \exp\left\{-\frac{2c|x|^{m'}}{(1+Qt)^{1/(m-1)}}\right\} dt\, dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Sigma^\infty} |u(t_0, x)| \exp\left\{-\frac{2c|x|^{m'}}{(1+Qt_0)^{1/(m-1)}}\right\} dx \right). \qquad (2)$$

Доказательство леммы 1 основано на том, что для вспомогательной функции $W(t, x) = t \exp\left\{-\frac{2c\varphi(x)}{(1+Qt)^{1/(m-1)}}\right\} \mathbf{e}$, $\varphi(x)$ — гладкая функция, равная $|x|^{m'}$ при $|x| \geqslant 1$, $\mathbf{e}$ — вектор, определенный конусом,

$$\mathcal{L}^*_w = \left\{1 + t|x|^{m'}\left[\frac{2c}{m-1}\frac{Q}{(1+Qt)^{m'}} + \sum_{|k| \leqslant m} (-2c)^{|k|} m'^{|k|} A^*_k(t, x) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{|x|^{(|k|-m)/(m-1)}}{(1+Qt)^{|k|/(m-1)}} \left(\frac{x}{|x|}\right)^k + \frac{1}{|x|} \Psi(t, x)\right]\right\} \exp\left\{-2c\frac{|x|^{m'}}{(1+Qt)^{1/(m-1)}}\right\} \mathbf{e}.$$

$\Psi(t, x)$ — ограниченная функция; выбирая затем Q достаточно большим, а t_0 — достаточно малым, получаем, что для $t \in [0, t_0]$:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{L}^* w \cdot u^+) \geqslant \gamma_1 \exp\left\{-2c\frac{|x|^{m'}}{(1+Qt)^{1/(m-1)}}\right\} |u^+|; \qquad (3)$$

лемма 1 следует из формул Грина и неравенства (3).

Если $u^- \equiv 0$ и $u|_{t=T} = 0$, то последовательно применяя лемму 1 к слоям $\Pi_{(T-t_0, T)}$, $\Pi_{(T-2t_0, T-t_0)}$ и т. д. получим утверждение теоремы 1.

Из теоремы 1 и теоремы 1 (неравенство 6) из ([2]) следует:

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условию* α *и* $P(t, x; D_x)$ — *равномерно эллиптический оператор. Если* $u(t, x)$ — *решение системы* (1) *в* Π_T, *непрерывное в* $\overline{\Pi}_T$, *то из* $u \in K$, $u|_{t=T} = 0$ *следует, что* $u(t, x) \equiv 0$ *в* Π_T.

2. Системы с постоянными коэффициентами. Здесь рассматривается система с постоянными коэффициентами:

$$\mathcal{L}u \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|k| \leqslant m} A_k D^k_x u \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + P(D_x) u = 0, \qquad (4)$$

$P(D_x)$ — эллиптический по Петровскому оператор, $m > 1$.

Теорема 3. *Пусть* $u(t, x)$ — *слабое в* Π_T *решение системы* (4), *непрерывное в* $\overline{\Pi}_T$ *и удовлетворяющее условию*

$$\|u^-(t, \xi)\|_{\Sigma^x_2} \leqslant C \exp[|x|^{m'} h(|x|)], \qquad (5)$$

где $h(r)$ — медленно растущая функция ([3]) *такая, что*

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\,[h(r)]^{1/(m-1)}} = \infty. \tag{6}$$

Если $u(0, x) = 0$, то $u(t, x) \equiv 0$ в Π_T.

Доказательство теоремы проводится с помощью методики Н. Н. Чауса ([3]), при этом существенно используется L_1-гипоэллиптичность систем первого порядка по t (с переменными коэффициентами любого типа), т. е. возможность получения L_1-оценки решений по сечениям $t = \text{const}$ из L_1-оценки по некоторому $(n+1)$-мерному параллелепипеду, и возможность замены в методике Н. Н. Чауса поточечных оценок L_1-оценками решений в сечениях $t = \text{const}$.

3. Параболические по Петровскому системы с растущими с ростом пространственных координат коэффициентами. Рассмотрим равномерно параболическую по Петровскому систему

$$\mathscr{L}\left(t,\ x;\ \frac{\partial}{\partial t},\ D_x\right) u \equiv \sum_{k_0 p + |k| \leqslant m} A_{k_0 k}(t,\ x) \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} D_x^k u = 0. \tag{7}$$

Используя теорему единственности решения задачи Коши, установленную В. С. Рыжим в ([4]), и оценку (6) теоремы 1 ([2]), справедливую и для решений систем с определенным образом растущими с ростом пространственных координат коэффициентами, легко доказать следующее предложение:

Теорема 4. *Пусть система* (7) *равномерно параболическая по Петровскому, сопряженный к $\mathscr{L}\left(t,\ x;\ \frac{\partial}{\partial t},\ D_x\right)$ оператор $\mathscr{L}^*\left(t,\ x;\ \frac{\partial}{\partial t},\ D_x\right)$ имеет коэффициенты $\overset{*}{A}_{k_0 k}(t,\ x)$, обладающие свойством: $\overset{*}{A}_{k_0 k}(t,\ x) \times \times |x|^{(k_0 p + |k| - m)/(p-1) - \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, равномерно непрерывны и ограничены в слое Π_T (при $|x| < 1$ степенной множитель при $\overset{*}{A}_{k_0 k}(t,\ x)$ писать не нужно). Если $u(t,\ x)$ — решение в Π_T системы* (7), *непрерывное в $\overline{\Pi}_T$, у которого $\|u^{-1}(t,\ \xi)\|_{\Sigma_2^x} \leqslant C \exp\{|x|^{m'} h(|x|)\}$, $h(r)$ — медленно растущая функция $\int\limits_1^\infty dr/rh^{1/(m-1)}(r) = \infty$, $u(0,\ x) = 0$, то $u(t,\ x) \equiv 0$ в Π_T.*

4. Теорема о совпадении решений с одинаковыми начальными условиями. До сих пор рассматривалось решение, равное нулю при $t = 0$ и при некоторых ограничениях на возможный рост его составляющей, не попавшей в конус K, устанавливалось тождественное равенство ее нулю. Если же рассматривать два решения $u_1(t,\ x)$, $u_2(t,\ x)$, совпадающие при $t = 0$, и определить функцию $u(t,\ x) = u_1(t,\ x) - u_2(t,\ x)$, то условия на $u_1^-(t,\ x)$, $u_2^-(t,\ x)$ не дают информации об $u^-(t, x)$, и поэтому изложенные теоремы неприменимы. Однако можно выделить класс уравнений, для решений которых из ограничений на $u_1^-(t, x)$, $u_2^-(t, x)$ получаются L_1-оценки $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ без дополнительных предположений об их поведении на начальной гиперплоскости.

Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L} u \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|k| \leqslant m} A_k(t,\ x) D_x^k u = 0. \tag{8}$$

Пусть выполнено следующее условие:

β. Область значений многочлена $P_0(t,\ x;\ \sigma) = \sum\limits_{|k| = m} A_k(t,\ x)\sigma^k$, $m > 1$, σ — любой вещественный вектор, лежит в секторе раствора, меньшего π, правой полуплоскости комплексной z-плоскости, т. е. $|\arg P_0(t,\ x;\ \sigma)| \leqslant \leqslant \varphi_1 < \pi/2$.

По углу φ_1 определим конус (угол) K_{φ_2} $|\arg u - \varphi_0| \leqslant \pi/2 - \varphi_1 - \varepsilon_1 = \varphi_2$, $\varepsilon_1 > 0$. По конусу K_{φ_2} определяются u^+, u^-.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (8) *удовлетворяет условиям* β, *коэффициенты* $\mathscr{L}^*$ — *условиям теоремы* 4. *Если* $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ — *решения уравнения* (8) *в* Π_T, *для которых* $\|u_i^-(t, \xi)\|_{\Sigma_2^x} \leqslant C_1 \exp\{|x|^{m'} h(|x|)\}$, $i = 1, 2$, $h(r)$ — *медленно растущая функция, для которой* $\int_1^\infty dr/r\,(h(r))^{1/(m-1)} = \infty$, *то из того, что* $u_1(0, x) = u_2(0, x)$, *следует, что* $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$ *в* Π_T.

Доказательство основано на возможности при выполнении условия β построения вспомогательной функции вида $tv(t, x)$, равной нулю на границе шаровой полулунки G и такой, что в G $\operatorname{Re}(\mathscr{L}^*(tv(t, x)) \cdot u^+) \geqslant 0$ части G, примыкающей к гиперплоскости $t = 0$ $\operatorname{Re}(\mathscr{L}^*(tv(t, x)) \cdot u^+) \geqslant \gamma |u^+|$, γ — положительная постоянная. Это позволяет получить оценку роста решений без условий на начальную гиперплоскость.

Затем используется то, что при $m = 2(2\nu + 1)$, $\nu = 0, 1, \ldots$, уравнение (8) параболическое по Петровскому, а при $m = 4\nu$ обратно параболично, и поэтому применима теорема 4.

5. Оценка решений взвешенно однородной системы в полупространстве. В заключение мы приведем некоторые попутно получающиеся из леммы 1 следствия о росте решений, определенных в полупространстве. Непосредственным следствием леммы 1 является:

Лемма 2. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условию* α. *Если*: 1) $u(t, x)$ — *решение системы* (1) *в полупространстве* $t < 0$; 2) $\|u^-\|_{\Pi^{1,x}_{(-1,0)}} \leqslant C_1(1 + |x|)^{s_1}$; 3) $\|u(0, \xi)\|_{\Sigma_1^x} \leqslant C_2(1 + |x|)^{s_2}$; 4) $\|u\|_{\Pi^{1,x}_{(-1,0)}} \leqslant C \exp[c|x|^{m'}]$, *то найдется постоянная* $d < 1$, *зависящая от* A, *и* $\lambda(A, s_1, s_2)$ *такие, что*

$$\|u\|_{\mathscr{E}_d} \leqslant \lambda(A, s_1, s_2)(C_1 + C_2).$$

Здесь $\mathscr{E}_d = \{(\tau, \xi), d(\tau, \xi) < d\}$, $d(t, x) = (|t|^{2/m} + |x|^2)^{1/2}$.

Из леммы 2 следует

Теорема 6. *Пусть:* 1) $u(t, x)$ — *решение взвешенно-однородной системы* $\mathscr{L}_0 u \equiv -\dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{|k|=m} A_k(t, x) D_x^k u = 0$ *в полупространстве* $t < 0$; 2) $\|u^-\|_{\mathscr{E}_{d(t,x)}} \leqslant C_1 d(t, x)^{s_1}$, $d(t, x) \geqslant 1$; 3) $\|u(0, \xi)\|_{\Sigma_{|x|}} \leqslant C_2 |x|^{s_2}$, $\|x\| \geqslant 1$; 4) $\|u\|_{\pi^{1,x}_{(-T,0)}} \leqslant M(T, \eta) \exp\{\eta |x|^{m'}\}$ *для любых положительных* T, η (*если* $\sum\limits_{|k|=m} A_k(t, x)\sigma^k$ *равномерно эллиптическая по Петровскому матрица, то из* 2), 3) *следует* 4)), *то найдется постоянная* $C_3 = C_3(A, s_1, s_2)$ *такая, что*

$$\|u\|_{\mathscr{E}_{d(t,x)}} \leqslant C_3 d(t, x)^{s_3}, \quad s_3 = \min(s_1, s_2 - m).$$

Из последней теоремы следует уточненная теорема Лиувилля для систем с постоянными коэффициентами.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IV 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, ДАН, 184, № 5, 1027 (1969). [2] В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, ДАН, 189, № 3 (1969). [3] Н. Н. Чаус, Тр. семинара по функциональному анализу, в. 1, Институт математики АН УССР, 1968, стр. 176. [4] В. С. Рыжий, Уч. зап. Харьковск. гос. унив., 135, Зап. мех.-матем. фак. и Харьковс. матем. общ., 29, сер. 4, 16 (1963). [5] D. G. Aronson, Ann. polon. math., 16, 286 (1965). [6] D. G. Aronson, P. Besala, Coll. math., 13, 125 (1967).