Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 5

УДК 530.12:531.51

ФИЗИКА

Н. П. КОНОПЛЕВА

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 27 VI 1969)

В данной заметке показано, что интегральные законы сохранения «момента», «энергии» и «импульса» системы тел в искривленном V_4 могут быть получены из одного ковариантного дифференциального закона сохранения симметричного тензора энергии — импульса этой системы в предположении, что пространство — время V_4 допускает некоторую группу движений *.

Как известно ([1], [2]), в римановом пространстве равенство векторов, отнесенных к разным его точкам, не имеет абсолютного смысла, так как эти векторы преобразуются различно при переходе к новой системе координат. По этой причине интегрирование в римановом пространстве определено только для скаляров. Поскольку элемент объема является полностью антисимметричной величиной, скаляр, стоящий под знаком интеграла, образуется путем свертки некоторого антисимметричного тензора с элементом объема. Симметричные тензоры при таком свертывании скаляра не дают. Поэтому для их интегрирования приходится применять искусственные приемы, например, свертывать предварительно симметричный тензор с некоторыми дополнительно введенными величинами до получения вектора и этот вектор уже интегрировать. Именно на этом пути, рассматривая свертку тензора энергии — импульса T^{ik} с вектором Киллинга ξ^i, определяющим группу движений пространства — времени V_4, можно сформулировать интегральные законы сохранения в общей теории относительности ([4], [5]). Ниже будет показано, что при этом вместо набора интегральных законов сохранения момента, энергии и импульса, имеющих место в плоском V_4, возникает один общий закон сохранения, получаемый из ковариантного дифференциального закона сохранения симметричного тензора энергии — импульса T^{ik},

$$T^{ik}{}_{;k} = 0. \tag{1}$$

Характер и количество величин, сохраняющихся интегрально, определяются при этом структурой группы движений, т. е. видом вектора Киллинга. Чем у́же группа движений V_4, тем меньше компонент «энергии», «импульса» и «момента», сохраняющихся интегрально, мы можем определить.

Рассмотрим формулу Грина в римановом пространстве ([4])

$$\int J^m{}_{;m} d_4 v = \oint J^m \varepsilon(N)\, N_m d_3 v, \tag{2}$$

где N_m — вектор нормали; $\varepsilon(N)$ — индикатор вектора N_m; d_4v и d_3v — инвариантные элементы объема.

* Импульсами и моментами здесь называются величины, имеющие в конкретной системе координат вид, аналогичный соответствующим величинам в декартовой системе координат в плоском V_4. В римановом пространстве эта терминология является несколько условной, так как разделение сохраняющихся величин на импульсы и моменты становится зависящим от системы координат.

Для симметричного тензора второго ранга T^{ik} формула, аналогичная формуле (2), может быть получена при помощи дополнительного вектора λ_i ([4], [5])

$$\int (T^{ik}\lambda_k)_{;i}\, d_4v = \int T^{ik}{}_{;k}\lambda_k d_4v + \int T^{ik}\lambda_{i;k}d_4v. \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, что интегральный закон сохранения для симметричного тензора имеет смысл только вдоль определенных направлений, а именно вдоль траекторий векторного поля λ_k. Если риманово пространство не допускает существования какого-либо векторного поля (что в общем случае возможно), то нельзя найти интегральные законы сохранения в этом пространстве. Правда, для риманова пространства, имеющего метрику с сигнатурой Минковского, это ограничение несущественно, так как условие существования такой метрики совпадает с условием существования на многообразии непрерывного поля направлений ([6]). Таким образом, в пространствах общей теории относительности всегда существует некоторое векторное поле и, следовательно, всегда можно построить интегральные сохраняющиеся величины (хотя бы одну). Характер векторного поля λ_k определяет свойства сохраняющейся интегральной величины. Несмотря на то, что мы интегрируем дифференциальный закон сохранения тензора энергии — импульса, интегральная величина может иметь совсем другой смысл. Заметим, например, что если лагранжиан не содержит вторых производных от полевых переменных, то любой ток сохранения, порождаемый группой G_r, приводится к виду:

$$J^{\mu}_a = T^{\mu}_{\nu}\,\xi^{\nu}_a - \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \underset{a}{I}\psi,$$

причем $\delta x^{\nu} = \xi^{\nu}_a\,\varepsilon^a$, $\delta\psi = \underset{a}{I}\psi\varepsilon^a$, ε^a — параметры G_r. Таким образом, для скалярных представлений $G_r\,(\delta\psi = 0)$ свойства J^{μ}_a определяются свойствами T^{μ}_{ν} и векторов ξ^{ν}_a.

Пусть λ_k определяет группу движений пространства — времени, т. е. является вектором Киллинга: $\lambda_k = \xi_k$, причем $\xi_{(k;i)} = 0$. Тогда соотношение (3) принимает вид, напоминающий формулу (2):

$$\int T^{ik}{}_{;i}\,\xi_k d_4v = \oint T^{ik}\xi_k\varepsilon(N)\,N_i d_3v. \qquad (4)$$

В частном случае плоского пространства ξ^k имеет вид: 1) для сдвигов $\xi^k_l = \delta^k_l$; 2) для вращений $\xi^k_{(in)} = \underset{(in)}{L}{}^k_l x^l$, где $\underset{(in)}{L}{}^k_l = \delta^k_n g_{il} - \delta^k_i g_{nl}$ — матрица лоренцевых вращений.

Из формулы (4) в первом случае получаем

$$\int T^{ik}{}_{;i} d_4v = \oint T^{ik}\varepsilon(N)\,N_i d_3v,$$

откуда, учитывая (1), при интегрировании по бесконечно удаленным поверхностям, где T^{ik} обращается в нуль, получим интегральный закон сохранения 4-импульса P^i, где $P^i = \int T^{i0}\varepsilon(N)\,N_0 d_3v_3$. В случае вращений плоского пространства формула (4) дает

$$\int T^{ik}{}_{;i}\,\underset{(pq)}{L}_{kn}x^n d_4v = \int (T^{ik}\underset{(pq)}{L}_{kn}x^n)_{;i} d_4v -$$
$$- \int T^{ik}\underset{(pq)}{L}_{ki} d_4v = \oint T^{ik}\underset{(pq)}{L}_{kn}x^n\varepsilon(N)\,N_i d_3v.$$

Если тензор T^{ik} симметричен, отсюда получим обычный закон сохранения момента системы

$$\int \underset{(pq)}{M}{}^i{}_{;i} d_4v = \oint \underset{(pq)}{M}{}^i\varepsilon(N)\,N_i d_3v,$$

где

$$\underset{(pq)}{M^i} = T^i_p x_q - T^i_q x_p. \qquad (5)$$

Заметим, что формула (5) описывает полный момент системы, а не орбитальный [7]. Распадение полного момента на спиновую и орбитальную части происходит при использовании канонического тензора энергии — импульса, который, вообще говоря, не симметричен. Возможно, что определение полного момента системы с помощью формулы (5) окажется удобным в общей теории относительности, поскольку симметричный тензор энергии — импульса может быть взят из уравнений Эйнштейна (в частности, по-видимому, можно вместо T^{ik} использовать тензор Эйнштейна G^{ik}).

Рассмотрим теперь группу движений 4-мерного пространства постоянной кривизны (группу де Ситтера). В стереографических координатах элемент длины этого пространства имеет вид [8] $-ds^2 = \varphi^2 dx^{i^2}$, где $\varphi = (1 + (r^2 - x_0^2) / 4R^2)^{-1}$ $(r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)$.

Группа де Ситтера изоморфна группе вращений O_5. Ее генераторы можно представить в виде [8]

$$\Pi_l = \varphi^{-1} P_l + \frac{x_k}{2R^2} L_{kl}, \; L_{ik} = x_i P_k - x_k P_i, \text{ где } P_k = -i\,\partial/\partial x^k.$$

Таким образом, только в пределе плоского пространства $(R \to \infty)$ оператор 4-импульса Π_l приобретает смысл оператора сдвига по координатам. В искривленном пространстве «импульс» всегда будет смешиваться с «моментом». Чтобы этого избежать, нужно было бы выбрать в группе движений 4 коммутирующих между собой оператора и назвать их операторами 4-импульса. Однако это невозможно, так как группа де Ситтера проста и имеет ранг 2. В результате 4-импульс и полный момент системы становятся компонентами 5-мерного полного момента системы.

Выпишем интегральные сохраняющиеся величины, предполагая, как обычно, что на пространственной бесконечности $T^{ik} = 0$ *. Для компонент 4-мерного момента получим обычное выражение

$$M_{lm} = \int M^0_{(lm)}\, \varepsilon(N)\, N_0 d_3 v = \int \varphi^4 M^0_{(lm)}\, d^3x, \qquad (6)$$

где $M^0_{(lm)}$ определяется формулой (5), но x уже не декартовы, а стереографические координаты.

Обобщенные «сдвиги» дают 4 вектора Киллинга, которые определяют сохраняющийся (при тех же условиях на пространственной бесконечности) обобщенный «4-импульс» с компонентами:

$$P^0 = \int \sqrt{-g}\, T^0_k \xi^k_0\, d^3x =$$
$$= \int \varphi^3 T^0_0 d^3x - \int \frac{r^2}{2R^2} \varphi^4 T^0_0 d^3x + \int \varphi^4 \frac{x_0 x_\alpha}{2R^2} T^0_\alpha d^3x \quad (\alpha = 1, 2, 3); \qquad (7)$$

$$P^\alpha = \int \sqrt{-g}\, T^0_k \xi^k_\alpha d^3x =$$
$$= \int \varphi^3 T^0_\alpha d^3x - \int \varphi^4 \frac{\sum\limits_{k \neq \alpha} x_k^2}{2R^2} T^0_\alpha d^3x + \int \varphi^4 \sum_{k \neq \alpha} T^0_k \frac{x_k x_\alpha}{2R^2} d^3x. \qquad (8)$$

Эти выражения имеют смысл в том случае, если метрика пространства — времени считается жестко заданной и не связана с распределением материи. Если же рассматривается геометризованная теория (общая теория относительности), то с необходимостью T^{ik} будет пропорционален

* Мы рассматриваем систему тел, занимающую конечный объем в пространстве де Ситтера. Метрика V_4 считается заданной.

метрическому тензору g^{ik}, и вместо (6) — (8) мы получим

$$M_{0\alpha}=\int\sqrt{-g}\,\xi^0_{(0\alpha)}d^3x=\int\varphi^4x_\alpha d^3x \tag{9}$$

(другие компоненты «момента» равны нулю),

$$P^0=\int\varphi^3d^3x-\int\frac{r^2}{2R^2}\varphi^4d^3x=\int\frac{(1-(r^2+x_0^2)/4R^2)}{1+(r^2-x_0^2)/4R^2}\varphi^3d^3x; \tag{10}$$

$$P^\alpha=\int\frac{x_0x_\alpha}{2R^2(1+(r^2-x_0^2)/4R^2)}\varphi^3d^3x. \tag{11}$$

Заметим, что если $T_k{}^i$ можно свести к дивергенции, интегралы (7), (8) превращаются в поверхностные, что в закрытой модели приводит к $P^i=0$.

Полученные выражения для интегральных сохраняющихся величин обладают двумя важными особенностями. Первая из них — хронометрическая инвариантность (х.и.). В рассматриваемом случае линии времени ортогональны к пространственно-временному сечению $x^0=\text{const}$. Поэтому х.и. элемент трехмерного объема (совпадающий с инвариантным элементом объема d_3v по Сингу ([4])), имеет вид φ^3d^3x; вектор нормали $N_i=\delta_i^0\sqrt{g_{00}}$; $N_0=\sqrt{g_{00}}$; $N^0=1/\sqrt{g_{00}}$. Учитывая это, запишем выражения для P^i, M_{ik} в явно хронометрически инвариантном виде (х. и. компоненты тензоров интегрируются по х.и. элементу объема)

$$P^0=\int\varphi^3d^3x-\int\frac{x^\alpha M_{0(0\alpha)}}{2\sqrt{g_{00}}R^2}\varphi^3d^3x,$$

$$P^\alpha=\int\frac{T_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}\varphi^3d^3x-\int\frac{x^kM_{0(\alpha k)}}{2\sqrt{g_{00}}R^2}\varphi^3d^3x,\qquad M_{lm}=\int\frac{M_{0(lm)}}{\sqrt{g_{00}}}\varphi^3d^3x.$$

Х.и. по Зельманову обеспечивает независимость найденных величин от произвольных преобразований координат, связанных с данной системой отсчета. Тем самым эти величины действительно характеризуют выбранную систему. Движение системы в целом у нас описывается группой движения V_4, по отношению к которой набор 10 компонент P^i, M_{ik} образует регулярное представление. «Сдвиги» в V_4 перепутывают P^i и M_{ik} между собой.

В заключение автор благодарит К. П. Станюковича за интерес к работе, а также Г. А. Соколика и участников семинара под его руководством за полезные и дружеские дискуссии.

Поступило
28 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, М.—Л., 1939. [2] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», 1964. [3] А. З. Петров, Новые методы в общей теории относительности, «Наука», 1966. [4] Дж. Синг, Общая теория относительности, ИЛ, 1960. [5] В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1955. [6] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., 1959. [7] А. Лихнерович, Теория связанностей в целом и группы голономии, ИЛ, 1960. [8] Ф. Гюрши, Сборн. Теория групп и элементарные частицы, М., 1967.