Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 5

УДК 513.813+530.12:531.51 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. ЛЕМЛЕЙН

КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКИЕ КОНФОРМНО-ЭВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО КОНТИНУУМА В ЦЕЛОМ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 20 VI 1969)

1. Пусть g_{ij} — метрический тензор, R_{ij} — тензор Риччи и R — скалярная кривизна риманова многообразия. Квазисимметрические конформно-эвклидовы пространства размерности $n \geqslant 4$ определяются условиями: $C_{ij,k}{}^{l} = 0$, $T_{ljk} = 0$, где $C_{ij,k}{}^{l}$ — тензор конформной кривизны Вейля [1, 3], а

$$T_{ljk} = \nabla_l T_{jk} - \frac{n-2}{2(1-n)(n+2)} \Delta_{(l} T g_{jk)} + \frac{3n-4}{2n(1-n)} \nabla_l T g_{jk},$$

$$T_{jk} = -\frac{1}{\varkappa}\left(R_{jk} - \frac{2}{n} R g_{jk} + \Lambda g_{jk}\right), \quad T = g^{jk} T_{jk} = \frac{1}{\varkappa}(R - n\Lambda)$$

$$(\varkappa, \Lambda = \mathrm{const}).$$

В специальных конформно-эвклидовых координатах

$$ds^2 = \frac{1}{U} \overset{\circ}{g}_{ij} dx^i dx^j,$$

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ji} — \mathrm{const}, \ \det \|\overset{\circ}{g}_{ij}\| \neq 0,$$

где

$$U = a(\overset{\circ}{g}_{ij} x^i x^j)^2 + b_i x^i \overset{\circ}{g}_{jk} x^j x^k + \overset{\circ}{g}_{ki} L^k_j x^i x^j + d_i x^i + e =$$
$$= a\langle x, x\rangle^2 + \langle b, x\rangle\langle x, x\rangle + \langle Lx, x\rangle + \langle d, x\rangle + e$$
$$(a, b_i, L^k_j, d_k, e — \mathrm{const}, \ \overset{\circ}{g}_{ki} L^k_j = \overset{\circ}{g}_{kj} L^k_i).$$

2. Рассматриваемые пространства будут симметрическими тогда и только тогда, когда $R = \mathrm{const}$ [9]. Последнее же эквивалентно системе

$$a\lambda = \frac{n+2}{8}\langle b, b\rangle, \quad e\lambda = \frac{n+2}{8}\langle d, d\rangle, \quad L^*|b\rangle = (n+2)a|d\rangle,$$

$$L^*|d\rangle = (n+2)e|b\rangle,$$

$$L^*\left[L^* - \lambda\left(\frac{|b\rangle\langle b|}{\langle b, b\rangle} + \frac{|d\rangle\langle d|}{\langle d, d\rangle} - E\right)\right] = \left[(n+2)^2 ae - \frac{(n+2)^2}{8}\langle b, d\rangle\right] E,$$

где $\lambda = \mathrm{tr}\, L - \dfrac{R}{2(1-n)}$, $\quad L^* = \dfrac{n+2}{2} L - \lambda E, E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}.$

Симметрические конформно-эвклидовы пространства особенно богаты хорошими геометрическими свойствами, ибо они допускают транзитивную группу движений [2] и обладают конформной интерпретацией. Если $R_{ij,kl} \neq 0$, то в случае положительной определенности основной квадратичной формы метрика таких пространств может быть приведена к виду

$$S^2 = \frac{dx^{1^2} + dx^{2^2} + \ldots + dx^{n^2}}{A^2[(x^{1^2} + x^{2^2} + \ldots + x^{n^2})^2 + 2(-x^{1^2} - x^{2^2} - \ldots - x^{\nu^2} + x^{\nu+1^2} + \ldots + x^{n^2}) + 1]}$$

$$(A > 0).$$

Отсюда видно, что при $\nu \neq 0$, n симметрические конформно-эвклидовы пространства отличны от пространств постоянной кривизны.

Уравнение абсолюта

$$(x^{1^2}+x^{2^2}+\ldots+x^{n^2})^2+2(-x^{1^2}-x^{2^2}-\ldots-x^{\nu^2}+$$
$$+x^{\nu+1^2}+\ldots+x^{n^2})+1=0$$

выделяет в n-мерном вещественном пространстве $(\nu-1)$-мерную сферу

$$x^{1^2}+x^{2^2}+\ldots+x^{\nu^2}=1,$$
$$x^{\nu+1^2}+x^{\nu+2^2}+\ldots+x^{n^2}=0.$$

Придавая ν значения $0, 1, 2, \ldots, n$, получаем действительные части абсолютов всех симметрических конформно-эвклидовых пространств.

3. При построении математической модели пространственно-временного континуума в целом в общей теории относительности особый интерес представляют такие квазисимметрические конформно-эвклидовы пространства, которые могут быть рассмотрены в рамках общих, нестационарных моделей Фридмана ([3], [6]), с отличным от нуля космологическим членом Λ. При этом тензор массы берется в общей гидродинамической форме ([3], [5])

$$T^{ik}=\left[\rho^*+\frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi+p)\right]\tau^i\tau^k-\frac{p}{c^2}\overset{\circ}{g}{}^{ik},\quad \overset{\circ}{g}{}^{ik}=\overset{\circ}{g}_{ik}=\begin{pmatrix}-1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & +1\end{pmatrix},$$

где ρ^* — плотность инвариантной части массы покоя, p — давление, $\Pi=\int\limits_0^p\frac{dp}{\rho^*}-\frac{p}{\rho^*}$ — потенциальная энергия единицы массы, c — скорость света, τ^i — компоненты вектора четырехмерной скорости.

Соответствующая метрика при естественном дополнительном требовании $(\rho^*>0)$ принимает вид:

$$ds^2=\frac{-dx^{1^2}-dx^{2^2}-dx^{3^2}+dx^{4^2}}{A^2\left\{[-x^{1^2}-x^{2^2}-x^{3^2}+x^{4^2}-(1-k^2)]^2+4x^{4^2}\right\}}\quad(0<A,\ 0<k<1).$$

Переходя от конформно-эвклидовых к другим, специально подобранным координатам, получаем:

$$ds^2=c^2dt^2-\frac{1}{4A^2\,\mathrm{dn}^2(2Act,k)}\,\frac{dx^{1^2}+dx^{2^2}+dx^{3^2}}{[1+{}^1/_4(x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2})]^2}.$$

Здесь c — скорость света, t — время, а $\mathrm{dn}(2Act,k)$ — последняя из трех эллиптических функций Якоби $\mathrm{sn}(x,k)$, $\mathrm{cn}(x,k)$, $\mathrm{dn}(x,k)$ модуля k.

Заметим, что при $k=0$ рассматриваемая модель дает стационарный мир А. Эйнштейна ([4]).

Через величины A и k легко выражаются:

1) Космологический член

$$\Lambda=4A^2(1-3k^2).$$

2) Давление

$$p=-\frac{20A^2}{\varkappa}k^2\frac{\mathrm{cn}^2(2Act,k)}{\mathrm{dn}^2(2Act,k)},\quad p_{\min}=\frac{-20A^2k^2}{\varkappa},\quad p_{\max}=0.$$

3) Масса идеализированной Вселенной

$$M=2\pi^2/\varkappa c^2A(1-k^2)^{3/2}.$$

4) Средняя плотность массы

$$\rho^*=\frac{8A^2}{\varkappa c^2}(1-k^2)^{-3/2}\,\mathrm{dn}^3(2Act,k),$$

$$\rho^*_{\min}=\frac{8A^2}{\varkappa c^2},\quad \rho^*_{\max}=\frac{8A^2}{\varkappa c^2}(1-k^2)^{-3/2}.$$

5) Радиус

$$B=\frac{1}{2A}\,\frac{1}{\mathrm{dn}(2Act,k)},\quad B_{\min}=\frac{1}{2A},\quad B_{\max}=\frac{1}{2A}(1-k^2)^{-1/2}.$$

6) Период изменения радиуса как функции времени

$$\tau = \frac{1}{Ac}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Рис. 1 дает общее представление о характере изменения радиуса идеализированной Вселенной со временем.

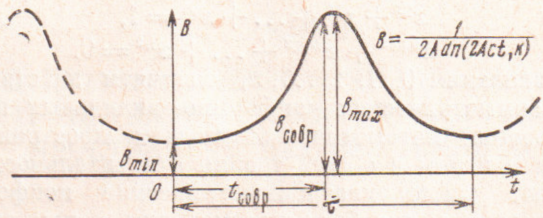

Рис. 1

4. Числовые значения параметров A и k (а также значение t, соответствующее нашей эпохе) могут быть найдены, исходя из экспериментальных данных:

1) Средняя плотность массы Вселенной в нашу эпоху [5]

$$\rho^*_{\text{совр}} = 4\cdot 10^{-29}\ \text{г/см}^3.$$

2) Постоянная Хаббла [7] $H_{\text{совр}} = 2{,}43\cdot 10^{-18}$ сек$^{-1}$.

3) Параметр ускорения [8] $K_{\text{совр}} = -qH^2$. Здесь $0{,}5 < q < 1{,}5$.

4) Постоянная тяготения $G = 6{,}67\cdot 10^{-8}$ см^3/г$\cdot$сек^2 и скорость света $c = 2{,}997\cdot 10^{10}$ см/сек.

Параметры A и k (а также значение времени t) связаны со средней плотностью массы ρ^* и величинами $H = B_t'/B$ и $K = B_{tt}''/B$ соотношениями

$$\rho^* = \frac{8A^2}{\varkappa c^2}(1-k^2)^{-3/2}\,\mathrm{dn}^3(2Act, k),$$

$$H = \frac{2k^2cA^2\,\mathrm{sn}(2Act, k)\,\mathrm{cn}(2Act, k)}{\mathrm{dn}(2Act, k)},$$

$$K = 4A^2k^2c^2 + 8A^2c^2(\mathrm{dn}^2(2Act, k) + 1) + 2H^2.$$

Внося в эту систему числовые значения $\rho^*_{\text{совр}}$, $H_{\text{совр}}$, $K_{\text{совр}}$, найденные экспериментально, а также значения скорости света c и постоянной $\varkappa = 8\pi G/c^4$, можно, используя возможности современной вычислительной техники, найти параметры A и k и современное значение времени $t_{\text{совр}}$. Далее, используя формулы 1) — 6) пункта 3, получаем значения всех остальных величин, дающих основные физические характеристики модели.

Соответствующие вычисления были проведены на машине БЭСМ-4 В. Топуновым.

Поскольку результаты вычислений существенно зависят от q, то возникает таблица. Однако необходимо особо отметить, что при выбранных значениях $\rho^*_{\text{совр}} = 4\cdot 10^{-29}$ г/см^3 и $H_{\text{совр}} = 2{,}43\cdot 10^{-18}$ сек$^{-1}$ в интервале ($1/2$, $3/2$) существует такое значение $q = Q = 1{,}31\,067\,645...$, при стремлении к которому $k \to +1$, а метрика квазисимметрической конформно-эвклидовой модели принимает вид:

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{1}{4A^2}\,\mathrm{ch}^2(2Act)\,\frac{dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}}{[1 + 1/4\,(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})]^2}.$$

Отсюда

$$B = \frac{1}{2A}\,\mathrm{ch}\,(2Act).$$

Таблица 1

Фрагменты таблицы значений основных параметров квазисимметрической конформно-эвклидовой модели пространственно-временного континуума в целом

q	0,5	1	1,3	1,31067645...	1,31067645...	1,31067645...
A^2 [см$^{-2}$]	$4,42 \cdot 10^{-57}$	$5,10 \cdot 10^{-57}$	$5,42 \cdot 10^{-57}$	$5,43 \cdot 10^{-57}$	$5,43 \cdot 10^{-57}$	$5,43 \cdot 10^{-57}$
$1-k^2$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	10^{-9}	$8,2 \cdot 10^{-20}$	$1,8 \cdot 10^{-24}$
Λ [см$^{-2}$]	$-3,37 \cdot 10^{-56}$	$-3,97 \cdot 10^{-56}$	$-4,33 \cdot 10^{-56}$	$-4,34 \cdot 10^{-56}$	$-4,34 \cdot 10^{-56}$	$-4,34 \cdot 10^{-56}$
$\frac{P_{\text{совр}}}{c^2}$ [г·см$^{-3}$]	$-2,29 \cdot 10^{-29}$	$-1,93 \cdot 10^{-29}$	$-1,77 \cdot 10^{-29}$	$-1,76 \cdot 10^{-29}$	$-1,76 \cdot 10^{-29}$	$-1,76 \cdot 10^{-29}$
$\frac{P_{\min}}{c^2}$ [г·см$^{-3}$]	$-4,59 \cdot 10^{-29}$	$-5,38 \cdot 10^{-29}$	$-5,81 \cdot 10^{-29}$	$-5,83 \cdot 10^{-29}$	$-5,83 \cdot 10^{-29}$	$-5,83 \cdot 10^{-29}$
$B_{\text{совр}}$ [см]	$3,3 \cdot 10^{28}$	$4,3 \cdot 10^{28}$	$2,1 \cdot 10^{29}$	$1,8 \cdot 10^{32}$	$2,0 \cdot 10^{37}$	$4,2 \cdot 10^{39}$
[млрд. св. лет]	$3,5 \cdot 10$	$4,5 \cdot 10$	$2,2 \cdot 10^2$	$1,9 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^{10}$	$4,4 \cdot 10^{12}$
$B_{\min}$ [см]	$7,5 \cdot 10^{27}$	$7,0 \cdot 10^{27}$	$6,8 \cdot 10^{27}$	$6,8 \cdot 10^{27}$	$6,8 \cdot 10^{27}$	$6,8 \cdot 10^{27}$
[млрд. св. лет]	7,9	7,4	7,2	7,2	7,2	7,2
$B_{\max}$ [см]	$4,2 \cdot 10^{28}$	$5,2 \cdot 10^{28}$	$2,6 \cdot 10^{29}$	$2,1 \cdot 10^{32}$	$2,4 \cdot 10^{37}$	$5,0 \cdot 10^{39}$
[млрд. св. лет]	$4,4 \cdot 10$	$5,5 \cdot 10$	$2,7 \cdot 10^2$	$2,2 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^{10}$	$5,3 \cdot 10^{12}$
$\overset{*}{\rho}_{\min}$ [г·см$^{-3}$]	$1,90 \cdot 10^{-29}$	$2,19 \cdot 10^{-29}$	$2,33 \cdot 10^{-29}$	$2,33 \cdot 10^{-29}$	$2,33 \cdot 10^{-29}$	$2,33 \cdot 10^{-29}$
$\overset{*}{\rho}_{\max}$ [г·см$^{-3}$]	$3,33 \cdot 10^{-27}$	$9,20 \cdot 10^{-27}$	$1,20 \cdot 10^{-24}$	$7,36 \cdot 10^{-16}$	1	10^7
M [г] (масса идеальн. Вселенной)	$2,8 \cdot 10^{58}$	$6,2 \cdot 10^{58}$	$7,2 \cdot 10^{66}$	$4,6 \cdot 10^{69}$	$6 \cdot 10^{84}$	$6 \cdot 10^{91}$
$N = \frac{M}{M_0{}^*}$	$7,0 \cdot 10^{13}$	$1,6 \cdot 10^{14}$	$1,8 \cdot 10^{22}$	$1,2 \cdot 10^{25}$	$1,5 \cdot 10^{40}$	$1,5 \cdot 10^{47}$
τ [сек]	$1,56 \cdot 10^{18}$	$1,59 \cdot 10^{18}$	$2,26 \cdot 10^{18}$	$5,29 \cdot 10^{18}$	$1,05 \cdot 10^{18}$	$1,29 \cdot 10^{18}$
[млрд. лет]	$4,9 \cdot 10$	$5,0 \cdot 10$	$7,2 \cdot 10$	$1,68 \cdot 10^2$	$3,33 \cdot 10^2$	$4,09 \cdot 10^2$
$t_{\text{совр}}$ [сек]	$5,94 \cdot 10^{17}$	$6,40 \cdot 10^{17}$	$9,86 \cdot 10^{17}$	$2,58 \cdot 10^{18}$	$5,21 \cdot 10^{18}$	$6,40 \cdot 10^{18}$
[млрд. лет]	$1,9 \cdot 10$	$2,0 \cdot 10$	$3,1 \cdot 10$	$8,2 \cdot 10$	$1,65 \cdot 10^2$	$2,03 \cdot 10^2$
$\frac{2t_{\text{совр}}}{\tau}$	0,76	0,81	0,87	0,98	0,989	0,990

* Масса нашей галактики $M_0 = 4 \cdot 10^{44}$ г.

Произведенные вычисления показывают, что рассматриваемая квазисимметрическая конформно-эвклидова модель пространственно-временного континуума в целом приводит к разумным космологическим выводам.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
16 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, 2, 1949. [2] С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., 1964. [3] А. З. Петров, Новые методы в общей теории относительности, М., 1966. [4] А. Эйнштейн, Сущность теории относительности, М., 1955. [5] В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961. [6] A. Friedman, Zs. Phys., 10, 377 (1922). [7] A. R. Sandage, Astrophys. J., 127, 513 (1958). [8] W. A. Baum, Astr. J., 62, 6 (1957). [9] В. Г. Лемлейн, III Всесоюзн. симпозиум по геометрии в целом, Петрозаводск, 1969, стр. 45.