

А. З. ПАТАШИНСКИЙ, А. А. ХАРЬКОВ
О ГРАВИТАЦИОННОМ КОЛЛАПСЕ
СЛАБО НЕСФЕРИЧЕСКОЙ МАССЫ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 23 VI 1969)

Гравитационный коллапс тела, форма которого мало отличается от сферической, изучался в работе (1). Общие свойства метрики вне тела оказываются в этом случае в основном теми же, что и для коллапса шара, и определяются основной сферической симметричной статической частью метрики. Имеется также малая несферическая и затухающая во времени добавка к метрике. При прохождении гравитационного радиуса r_g в сопутствующей системе отсчета и поля в нем не возникает (2). Цель настоящей заметки — более детальное рассмотрение задачи. Предполагается, что все характеристики тела имеют осевую симметрию. Выберем систему единиц, в которой $c = 1$, $k = 1$, $r_g = 1$. Поскольку отклонение от сферической симметрии предполагается малым, уравнение для добавок к метрике в пустоте можно взять в линейном приближении. Это позволяет сразу выделить угловую зависимость добавок, так как метрика нулевого приближения допускает группу трехмерных вращений O_3 . Удобен следующий математический прием. Мы рассмотрим вначале возмущение метрики Шварцшильда, а затем преобразуем полученное решение с помощью преобразования Леметра (3) для нулевого приближения. Полученная таким образом система отсчета не является сопутствующей для пробной частицы, но мало от нее отличается. Симметрия задачи позволяет искать метрику Шварцшильда в диагональном виде:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right)(1 + d) dt^2 - \frac{1+a}{1-1/r} dr^2 - r^2(1+b) d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta (1+c) d\varphi^2. \quad (1)$$

Уравнения поля в пустоте $R_{ik} = 0$ дают уравнения для величин a , b , c , d . Для выделения угловой зависимости разложим эти функции по системе обобщенных сферических функций, которые для нашего случая независимости от угла φ имеют вид $u_{0n}^l(\theta) = P_{0n}^l(\cos \theta)$ (4).

Оказывается, что

$$\begin{aligned} d &= \sum_{l=2} d_l P_{00}^l(\cos \theta), & a &= \sum_{l=2} a_l P_{00}^l(\cos \theta), \\ b + c = \chi &= \sum_{l=2} \chi_l P_{00}^l(\cos \theta), & c - b = \eta &= \sum_{l=2} \eta_l P_{02}^l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Для анализа уравнений поля рассмотрим эти уравнения при $r - 1 = y \ll 1$. Их решения в этой области имеют вид; например, для функции χ_l :

$$\chi_l = yF_+(t + \ln|y|) + yF_-(t - \ln|y|) + \varphi(t)\sqrt{y} + f(y), \quad (3)$$

где мы опустили у функции индекс l , в дальнейшем будем рассматривать какое-либо одно значение l . В решении (3) F_- и F_+ представляют собою запаздывающее и опережающее решения уравнений поля, $\varphi(t)$ — произ-

вольная функция. Функция $f(y)$ имеет вид

$$f(y) \simeq \text{const} \cdot y \ln |y| \quad (4)$$

и представляет собой асимптотику известного статического решения (1). При $y \rightarrow 0$ все величины не должны иметь особенности, поэтому $\varphi(t) = 0$. Функция $f(y)$ вида (4) может быть получена из F_+ и F_- . Таким образом получаем

$$\chi_i = y[F_+(t + \ln |y|) + F_-(t - \ln y)], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} a_l = d_l &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l-1)(l+2)}{l(l+1)}} \eta_l = \\ &= \frac{1}{2} [F'_+ - F'_-] + \frac{1}{4} [F_+ + F_-]. \end{aligned}$$

Совершим теперь преобразование Ле-метра. Метрика приобретает вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 + \frac{rd-a}{r-1}\right) d\tau^2 + 2 \frac{a-d}{r-1} dR d\tau - \\ &- \left(\frac{1}{r} - \frac{d-ra}{r(r-1)}\right) dR^2 - r^2(1+b) d\theta^2 - \\ &- r^2 \sin^2 \theta (1+c) d\varphi^2. \quad (6) \end{aligned}$$

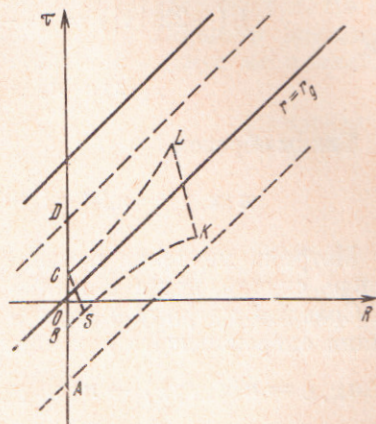


Рис. 1

Все функции следует при этом выразить через τ и R . Заметим, что опережающие и запаздывающие решения, записанные выше, не являются во всей области значений y волновыми. В каком-то смысле волновой зоной задачи оказалась окрестность гравитационного радиуса (в обычных задачах излучения эта зона лежит на больших расстояниях от системы). Область больших значений $|y|$ в нашем случае соответствует квазистатической зоне. Нашей задачей является построение решения во всем пространстве, убывающего при $R \rightarrow \infty$. Таким решением в статическом случае является решение типа Эреца и Розена, приведенное в (1) и имеющее асимптотику

$$\chi \sim y \ln |y|, \quad \eta \sim \ln |y|. \quad (7)$$

Для анализа решения воспользуемся рис. 1, на котором изображены мировые линии в леметровской картине. Мировая линия границы материи до попадания в область $y \ll 1$ есть OA . Решение в области правее OA мировой линии луча света, испущенного из точки A , в основном соответствует нерелятивистской задаче и понятно из общих соображений.

Мы предполагаем, следуя (1), что коллапс происходит после пролета над гравитационный радиус вблизи него в основном так же, как и в сферическом случае.

Если бы оказалось, что при $y < y_0$ до $y = 0$ решения являются почти статическими, то во всей области они совпадали бы с решениями типа Эреца и Розена, т. е. появилась бы особенность при $y = 0$. Линейное приближение стало бы неправильным, но решение Эреца и Розена является точным. Как будет видно из дальнейшего, это означало бы появление особенности в движении материи при $y = 0$, для чего мы не видим оснований. При $|y| \ll y_0$ решения наших уравнений имеют вид суперпозиции запаздывающей и опережающей функций вида

$$n(\tau, y) = f_1(\tau - 2\ln |y|) + f_2(\tau). \quad (8)$$

Рассмотрим метрику в точке S , перемещающейся по линии $y = \text{const}$. В момент, когда эта точка лежит на линии материи OBD , метрика в ней совпадает с метрикой на материи, так что $n(\tau, y(\tau)) = q(\tau)$. Линия дви-

жения материи вблизи $y = 0$ есть $y = \tau\sqrt{2}/2$, если $\tau = 0$ при $y = 0$.
Метрика $q(\tau)$ предполагается регулярной:

$$q(\tau) = n_0 + \tau n_1. \quad (9)$$

Поэтому

$$f_1(-2\ln|y|) + f_2(\tau) = n_0 + \tau n_1. \quad (10)$$

Получаем

$$f_1(-2\ln|\tau|) = n_0 - f_2(0) + [n_1 - f_2'(0)]e^{-1/2(2\ln|\tau|)},$$

т. е.

$$f_1(z) = n_0 - f_2(0) + [n_1 - f_2'(0)]e^{-z/2}. \quad (11)$$

Таким образом,

$$n(\tau, y) = n_0 + \tau f_2'(0) + [n_1 - f_2'(0)]e^{-1/2(\tau - 2\ln|y|)}. \quad (12)$$

Метрика медленно изменяется при удалении от материи. Рассмотрим теперь случай, когда τ велико, а $y \ll y_0$ и точка S перешла в положение K . Сравним метрику в двух точках L и K , где точка L лежит на той же линии опережающего потенциала, что и K , но при $y < 0$, $|y| \ll y_0$. Тогда

$$\Delta n_{K,L} = n(\tau_K, y_K) - n(\tau_L, y_L) = f_1(\tau_K - 2\ln|y_K|) - f_1(\tau_L - 2\ln|y_L|). \quad (13)$$

Значение запаздывающей функции найдем, двигаясь назад по времени вдоль линии геодезической, идущей от материи к точкам K и L (см. (11))

$$\Delta n_{KL} = (n_1 - f_2'(0))(y_K - y_L)e^{-\tau k/2}. \quad (14)$$

Мы получаем таким образом, что при τ очень больших в области $|y| \ll 1$ метрика постоянна с точностью до малой величины (14). Все определяется поведением метрики при $y \sim 1$ на границе нашей волновой зоны.

Правильная линейная комбинация для опережающей и запаздывающей функций должна быть выбрана из тех соображений, чтобы на пространственной бесконечности поле содержало лишь расходящуюся волну гравитационного излучения. Представим в координатах Шварцшильда поправки к метрике в виде гармонических составляющих по времени

$$n_\omega(t, y) = C_+(\omega)e^{i\omega(t+\ln|y|)} + C_-(\omega)e^{i\omega(t-\ln|y|)}. \quad (15)$$

Рассмотрим вначале малые частоты $\omega \ll 1$. Для этих частот в области больших расстояний имеется квазистатическая зона гравитационного излучения. Поэтому решение для этой области частот при малых, но конечных y , должно иметь вид, соответствующий решению Эреда и Розена:

$$n_\omega \simeq C(\omega)e^{i\omega t} \ln|y|. \quad (16)$$

Отсюда находим, что в формуле (15) при $\omega \ll 1$

$$C_+(\omega) = -C_-(\omega), \quad C(\omega) = 2i\omega C_+(\omega). \quad (17)$$

В области очень больших частот $\omega \gg l$, где l — номер сферической гармоники, волновая зона при $y \ll 1$ сразу переходит в волновую зону излучения, простирающуюся на пространственную бесконечность. В этом случае решение имеет в основном вид расходящейся волны, а амплитуда $C_+(\omega)$ опережающей функции в (15) мала по сравнению с $C_-(\omega)$ по параметру $1/\omega$.

Поведение запаздывающей функции определено выше формулой (11). Эффекты несферичности, таким образом, исчезают во внешнем пространстве экспоненциально по времени (безразлично, Шварцшильда или Леметра).

Продолжение решения в области больших значений $|y|$ при $y < 0$ после определения решения в окрестности $y = 0$ должно определить движение границы материи и в настоящей работе не рассматривается. На поведение метрики в области малых $|y|$ и при $r > r_g$ характер движения материи после пролета далеко под гравитационный радиус не влияет.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
18 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, ЖЭТФ, 49, 170 (1965). ² Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, 80, 391 (1963). ³ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, 1962. ⁴ И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., 1958.