Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 4

МАТЕМАТИКА

В. И. ЗУБОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

(*Представлено академиком Н. Н. Красовским 16 VI 1969*)

В настоящей заметке рассматривается задача оптимальной стабилизации в форме дифференциальной игры и даются условия существования и способ построения оптимальных управлений в аналитическом виде.

Рассмотрим сначала линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = PX + QU \tag{1}$$

и функционал

$$I(X_0, U) = \int_0^\infty W^{(2)} dt, \tag{2}$$

где

$$W^{(2)} = X^* AX + X^* BU + U^* B^* X + U^* CU.$$

Будем считать, что элементы матриц A, B, C, C^{-1}, P и Q являются вещественными, непрерывными и ограниченными функциями времени, заданными при $t > 0$.

Положим $X = (X_1, X_2)$ и $U = (U_1, U_2)$. Будем считать, что вектора X_i, U_i имеют соответственно размерности n_i и r_i. В соответствии с этим матрица C может быть представлена в форме

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & D \\ D^* & C_2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем предположение, существенное для дальнейшего. Именно, будем считать, что квадратичная форма $U_1{}^* C_1 U_1$ определенно-положительна, а $U_2{}^* C_2 U_2$ определенно-отрицательна.

Определение 1. Управление $U(t, X)$ называется допустимым, если: 1) $U(t, X) = M(t) \cdot X$ где $M(t)$ — матрица с вещественными, непрерывными и ограниченными коэффициентами, заданными при $t > 0$; 2) система (1) при управлении $U = M(t) \cdot X$ имеет равномерно асимптотическое устойчивое положение равновесия $X = 0$ экспоненциального типа.

Определение 2. Допустимое управление $U_0 = M_0(t) \cdot X$ называется оптимальным, если

$$I(X_0, U_0) = \min_{U_1} \max_{U_2} I(X_0, U) = \max_{U_2} \min_{U_1} I(X_0, U)$$

при любом начальном векторе X_0. Здесь min max и max min берется по всем таким управлениям U_1 и U_2, которые образуют допустимое управление $U = (U_1, U_2)$.

Замечание. Оптимальное управление U_0 можно рассматривать, таким образом, как ситуацию равновесия в дифференциальной игре двух лиц X_1, X_2, множества допустимых стратегий которых даются определением 1.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало оптимальное управление U_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала вещественная непрерыв-*

ная ограниченная матрица θ, *заданная при* $t > 0$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\dot{\theta} + \theta Q C^{-1} Q^* \theta + \theta (P - QC^{-1}B^*) + \\ + (P - QC^{-1}B^*)^* \theta - A + BC^{-1}B^* = 0 \qquad (3)$$

и такая, что управление $C^{-1}(Q^*\theta - B^*) \cdot X$ *допустимо. При этом* $U_0 = C^{-1}(Q^*\theta - B^*) \cdot X$.

Рассмотрим далее нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = PX + QU + \sum_{m=2}^{\infty} F^{(m)} = G(t, X, U) \qquad (4)$$

и функционал

$$\int_0^{+\infty} \sum_{m=2}^{\infty} W^{(m)} = I(X_0, U). \qquad (5)$$

Здесь $F^{(m)}$ и $W^{(m)}$ — однородные формы степени m относительно компонент векторов X и U с вещественными, непрерывными, ограниченными коэффициентами, заданными при $t > 0$. Будем далее считать, что ряды $W = \sum W^{(m)}$, $F = \sum F^{(m)}$ сходятся в некоторой фиксированной окрестности точки $X = 0$, $U = 0$ равномерно по отношению к $t > 0$.

Определение 3. Управление $U(t, X)$ называется допустимым, если:

1) $U(t, X) = \sum_{m=1}^{\infty} U^{(m)}$;

2) $U^{(1)}(t, X)$ является допустимым управлением в смысле определения 1.

При этом считаем, что ряд, представляющий допустимое управление, равномерно сходится по отношению к $t \geqslant 0$ в некоторой фиксированной окрестности точки $X = 0$.

Определение 4. Допустимое управление $U_0(t, X)$ называется оптимальным для системы (4) по отношению к функционалу (5), если существует некоторая окрестность точки $X = 0$ такая, что для любого начального значения X_0 из этой окрестности будет

$$I(X_0, U_0) = \min_{U_1} \max_{U_2} I(X_0, U) = \max_{U_2} \min_{U_1} I(X_0, U).$$

Здесь, как и выше, min max и max min вычисляется для тех U_1 и U_2, которые доставляют допустимое управление $U = (U_1, U_2)$ в смысле определения 3.

Теорема 2. *Если существует вещественное непрерывное ограниченное решение* θ *уравнения* (3), *заданное при* $t > 0$, *такое, что управление* $M_0 \cdot X$ *является допустимым в смысле определения* 1,

$$M_0 = C^{-1}(Q^*\theta - B^*),$$

и система $\dot{X} = P_0 X$, $P_0 = P + QM_0$, *правильная, то существует оптимальное управление*

$$U_0(t, X) = \sum_{m=1}^{\infty} U_0^{(m)}$$

для системы (4) *по отношению к функционалу* (5), *представимое в виде рядов, равномерно сходящихся при* $t \geqslant 0$. *Здесь, как и выше,* $U_0^{(m)}$ *представляют собой однородные формы степени* m *компонентов вектора* X.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\cdot G(t,\ X,\ U) = -\frac{\partial G^*}{\partial x}\cdot\lambda + \frac{\partial W}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial W}{\partial U} = \lambda^* \frac{\partial G}{\partial U}. \tag{7}$$

Здесь λ — вектор размерности n; частные производные по вектору X и по вектору U определяются естественным образом как матрицы соответствующих размерностей.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то система* (6), (7) *имеет единственное решение в виде сходящихся рядов*

$$\lambda = \sum \lambda^{(m)}, \quad U = \sum U^{(m)}, \tag{8}$$

$\lambda^{(1)} = -2\theta X$, $U^{(1)} = M_0 \cdot X$, *равномерно по отношению к* $t \geqslant 0$, *причем ряд* (8) *дает искомое оптимальное управление.*

Поступило
24 IV 1969