Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 5

УДК 537.312.62 **ФИЗИКА**

Ю. А. ЦЕРКОВНИКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ГРИНА НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 23 VI 1969)

В работе (1) было показано, что в теории неидеального бозе-газа удобно пользоваться способом расцепления цепочек уравнений для функций Грина, основанным на проектировании вторичноквантованных операторов в пространстве со скалярным произведением

$$(A, B) = -\langle\langle A \mid B^+\rangle\rangle_{E=0}, \tag{1}$$

где

$$\langle\langle A \mid B^+\rangle\rangle_E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iEt} \langle\langle A(t); B^+\rangle\rangle dt \tag{2}$$

фурье-компонента функции Грина $\langle\langle A(t); B^+\rangle\rangle = -i\theta(t)\langle[A(t), B^+]\rangle$ и $A(t) = \exp\{iHt\} A \exp\{-iHt\}$ — оператор в представлении Гейзенберга для системы с гамильтонианом H (2). В настоящей работе будет показано, что этот способ полезен и при исследовании асимптотики функций Грина неидеального бозе-газа при малых значениях энергии и импульса частицы. При этом для одночастичных функций Грина мы получим полюса, соответствующие обычному и второму звукам, не прибегая к обычному в этих случаях построению кинетического уравнения (см. например, (3)).

Будем рассматривать случай низких температур, когда число частиц в конденсате N_0 по порядку величины равно полному числу частиц N и взаимодействие между частицами мало. В соответствии с этим в уравнения движения для операторов уничтожения и рождения $a_q(t)$ и $a_{-q}^+(t)$ введем формальный малый параметр ε, заменяя фурье-компоненту потенциала взаимодействия $\nu(k)$ на $\varepsilon\nu(k)$, N и N_0 на $\varepsilon^{-1}N$ и $\varepsilon^{-1}N_0$. Уравнение движения для $a_q(t)$ имеет вид

$$i\frac{da_q}{dt} = [a_q H] = \left(\frac{q^2}{2m} - \mu + \frac{N}{V}\nu(0)\right) + \frac{N_0}{V}\nu(q)(a_q + a_{-q}^+) + \\ + \sqrt{\varepsilon}\, A_q + \frac{\varepsilon}{V}\sum_{k\neq 0,q;\; p\neq 0,-k} \nu(k)\, a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, \tag{3}$$

где $A_q = \sqrt{\varepsilon}\frac{\sqrt{N_0}}{V}\sum\{(\nu(q) + \nu(k))\, a_{-k}^+ + \nu(k)\, a_k\}\, a_{-k+q}$; a_q, a_p^+, a_k и т. д.— бозе-операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии с импульсом $\neq 0$; V — объем системы. Химический потенциал μ определяется из условия $\langle a_q\rangle = \delta_{q0}\sqrt{N_0}$ и равен

$$\mu = \frac{N}{V}\nu(0) + \frac{\varepsilon}{V}\sum \nu(k)\langle(a_k^+ + a_{-k})\, a_k\rangle + \frac{\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{N_0}\, V}\sum \nu(k)\langle a_p^+ a_{p+k}\, a_{-k}\rangle. \tag{4}$$

При $\varepsilon = 0$ получаем результат работы (4), который выражается соотношениями

$$a_q(t) = u_q\alpha_q e^{iE_q t} + v_q\alpha_{-q}^+ e^{iE_q t}, \quad E_q = \sqrt{\left(\frac{q^2}{2m}\right)^2 + \frac{q^2}{m}\frac{N_0}{V}\nu(q)}, \tag{5}$$

где α_q и α_{-q}^+ — бозе-операторы уничтожения и рождения квазичастиц с импульсом q и энергией E_q, причем в нулевом приближении

$$n_q = \langle \alpha_q^+ \alpha_q \rangle = (e^{E_q/\theta} - 1)^{-1}, \quad \langle \alpha_{-q} \alpha_q \rangle = 0. \tag{6}$$

Параметры u_q и v_q связаны соотношениями

$$u_q^2 - v_q^2 = 1, \quad u_q^2 + v_q^2 = \left(\frac{q^2}{2m} + \frac{N_0}{V}\nu(q)\right) E_q^{-1}, \; u_q v_q = -\frac{N_0}{2V}\frac{\nu(q)}{E_q}. \tag{7}$$

Учитывая члены более высокого порядка, кроме сделанного предположения о малости взаимодействия, характеризуемой параметром ε, будем считать, что радиус действия сил велик — больше среднего расстояния между частицами, равного $(V/N)^{1/3}$. При этом фурье-компоненты потенциала $\nu(k)$ под знаком суммы будут вырезать малую область вблизи $k = 0$, и при $V \to \infty$ этими членами можно пренебречь. В результате для одночастичных функций Грина (их фурье-компонент (2)) будем иметь уравнения

$$E \langle\langle \varphi_q | a_q^+ \rangle\rangle = 1 + \langle\langle \pi_q | a_q^+ \rangle\rangle,$$

$$E \langle\langle \pi_q | a_q^+ \rangle\rangle = \frac{q^2}{2m} + E_q^2 \langle\langle \varphi_q | a_q^+ \rangle\rangle + 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{N_0}\,\frac{\nu(q)}{V} \sum_{k \neq 0, q} \langle\langle a_{-k}^+ a_{-k+q} | a_q^+ \rangle\rangle, \tag{8}$$

где операторы φ_q и π_q равны $\varphi_q = a_q + a_{-q}^+$, $\pi_q = (q^2/2m)(a_q - a_{-q}^+)$ и обладают свойством $\varphi_q^+ = \varphi_{-q}$, $\pi_q^+ = -\pi_{-q}$. Учет в уравнениях (8) отброшенных членов не изменил бы их качественного характера и привел бы лишь к перенормировке массы m и потенциала $\nu(k)$ (см., например, ([1])).

Функция Грина $\langle\langle \Sigma a_{-k}^+ a_{-k+q} | a_q^+ \rangle\rangle$, входящая в правую часть последнего из уравнений (8), представляет собой коллективную переменную. В неидеальном бозе-газе сохраняющимися величинами являются поток и полная энергия квазичастиц. Поэтому, чтобы учесть коллективные свойства системы, базис из операторов φ_q и π_q, использовавшийся в работе ([1]), дополним операторами

$$g_q = \sum_{k \neq 0, \pm q/2} k \cdot q\, \alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}, \quad h_q = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0, \pm q/2} (E_{k-q/2} + E_{k+q/2})\, \alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}, \tag{9}$$

представляющими собой дивергенцию плотности потока и плотность энергии квазичастиц. При этом $g_q^+ = -g_{-q}$ и $h_q^+ = h_{-q}$. Заметим, что полное число квазичастиц не сохраняется. Проектируя оператор $\sum a_{k-q/2}^+ a_{k+q/2}$ на выбранное подпространство, будем иметь

$$\sum_{k \neq 0, \pm q/2} a_{k-q/2}^+ a_{k+q/2} \cong \left(\sum a_{k-q/2}^+ a_{k+q/2}, h_q\right)(h_q, h_q)^{-1} \cdot h_q. \tag{10}$$

Остальные проекции либо равны нулю, либо дают малый вклад в перенормировку массы и потенциала. Скалярные произведения в правой части (10) вычислим в приближении свободных квазичастиц, определяемом соотношениями (5), (6) и (7). Воспользовавшись определением (1), находим

$$\left(\sum a_{k-q/2}^+ a_{k+q/2}, h_q\right) \cong \sum (u_k^2 + v_k^2) \frac{\langle [\alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}, h_q^+] \rangle}{E_{k-q/2} - E_{k+q/2}} \cong$$

$$\cong -\sum_{k \neq 0} (u_k^2 + v_k^2) E_k \frac{\partial n_k}{\partial E_k} = \frac{1}{\theta} \sum_{k \neq 0} \left\{\frac{k^2}{2m} + \frac{N_0}{V}\nu(k)\right\} n_k (1 + n_k) \cong$$

$$\cong \frac{1}{\theta} \sum_{k \neq 0} \frac{k^2}{2m} n_k (1 + n_k), \tag{11}$$

где мы предположили, что импульс q мал и в последнем равенстве пренебрегли членом, содержащим $\nu(k)$ под знаком суммы. Аналогично получаем

$$(h_q, h_q) \cong \sum E_k^2 (\alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}, \alpha_{k'+q/2}^+ \alpha_{k'-q/2}) \cong \frac{1}{\theta} \sum E_k^2 n_k (1 + n_k). \tag{12}$$

Нам осталось теперь построить уравнения для коллективных функций Грина $\langle\langle g_q | a_q^+ \rangle\rangle$ и $\langle\langle h_q | a_q^+ \rangle\rangle$. Для этого, воспользовавшись уравнением (3) и выражением α_q через операторы a_q и a_{-q}^+: $\alpha_q = u_q a_q - v_q a_{-q}^+$, напишем уравнение движения для оператора $\alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}$

$$i \frac{d}{dt} \alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2} = (E_{k+q/2} - E_{k-q/2}) \alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2} + \sqrt{\varepsilon} (\alpha_{k-q/2}^+ A_{k+q/2} - A_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}) \tag{13}$$

В правой части уравнения (13) произведем все возможные спаривания операторов. Это эквивалентно проектированию последнего члена в (13) на подпространство, натянутое на операторы φ_q и π_q (учет скалярных произведений с операторами g_q и h_q даст вклад $\sim\sqrt{\varepsilon}$). Кроме того, учтем только те члены, в которые входит $\nu(q)$, чтобы при последующем суммировании по k потенциал оказался за знаком суммы. В результате для коллективных функций Грина будем иметь уравнения

$$E \langle\langle g_q | a_q^+ \rangle\rangle = \sum (k \cdot q)(E_{k+q/2} - E_{k-q/2}) \langle\langle \alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2} | a_q^+ \rangle\rangle +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon} \frac{\sqrt{N_0}}{V} \nu(q) \sum (u_{k-q/2} u_{k+q/2} + v_{k-q/2} v_{k+q/2})(k \cdot q)(n_{k-q/2} - n_{k+q/2}) \langle\langle \varphi_q | a_q^+ \rangle\rangle,$$

$$E \langle\langle h_q | a_q^+ \rangle\rangle = \frac{1}{2} \sum (E_{k+q/2} + E_{k-q/2})(E_{k+q/2} - E_{k-q/2}) \langle\langle \alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2} | a_q^+ \rangle\rangle. \tag{14}$$

Последний член первого уравнения при малых q может быть представлен в виде

$$\frac{\sqrt{N_0}}{V} \nu(0) \sum_{k \neq 0} (u_k^2 + v_k^2)(k \cdot q) \frac{\partial E_k}{\partial k} \frac{(k \cdot q)}{k} \frac{\partial n_k}{\partial E_k} = -\frac{q^2}{3\theta} \frac{\sqrt{N_0}}{V} \nu(0) \times$$

$$\times \sum \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{N_0}{V} \nu(k) \right) E_k^{-1} \frac{\partial E_k}{\partial k} k n_k (1 + n_k) \cong -\frac{q^2}{3\theta} \frac{\sqrt{N_0}}{V} \nu(0) \sum \frac{k^2}{2m} n_k (1 + n_k), \tag{15}$$

где мы воспользовались также тем, что при малых температурах можно считать $\frac{\partial E_k}{\partial k} k \cong \sqrt{\frac{N_0}{V} \frac{\nu(0)}{m}}\, k \cong E_k$ и пренебрегли членом, содержащим $\nu(k)$.

Выразим двухчастичные операторы в правых частях уравнений (14) через g_q и h_q:

$$\sum_{k \neq 0, \pm q/2} (k \cdot q)(E_{k+q/2} - E_{k-q/2}) \alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2} \cong$$

$$\cong \sum (k \cdot q)(E_{k+q/2} - E_{k-q/2})(\alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}, h_q)(h_q, h_q)^{-1} h_q; \tag{16}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k \neq 0, \pm q/2} (E_{k+q/2} + E_{k-q/2})(E_{k+q/2} - E_{k-q/2}) \alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2} \cong$$

$$\cong \sum (E_{k+q/2} + E_{k-q/2})(E_{k+q/2} - E_{k-q/2})(\alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}, g_q)(g_q, g_q)^{-1} g_q. \tag{17}$$

Скалярные произведения, входящие в правые части (16) и (17), равны

$$\sum_{k \neq 0, \pm q/2} (k \cdot q)(E_{k+q/2} - E_{k-q/2})(\alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}, h_q) \cong$$

$$\cong \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0, \pm q/2} (E_{k+q/2} + E_{k-q/2})(E_{k+q/2} - E_{k-q/2})(\alpha_{k-q/2}^+ \alpha_{k+q/2}, g_q) \cong$$

$$\cong -\frac{q^2}{3} \sum_{k, k' \neq 0} E_k \frac{\partial E_k}{\partial k} k (\alpha_{k+q/2}^+ \alpha_{k-q/2}, \alpha_{k'+q/2}^+ \alpha_{k'-q/2}), \tag{18}$$

$$(g_q, g_q) \cong \frac{q^2}{3} \sum_{k, k' \neq 0} k^2 (\alpha_{k+q/2}^+ \alpha_{k-q/2}, \alpha_{k'+q/2}^+ \alpha_{k'-q/2}). \tag{19}$$

Скалярное произведение (h_q, h_q) вычислено в (12).

При низких температурах $(\theta \to 0)$ основной вклад в сумму дают члены с малыми k. Поэтому в (18) и (19) $\frac{\partial E_k}{\partial k} k \cong E_k \cong \sqrt{\frac{N_0}{V}\frac{\nu(0)}{m}}\, k$. В результате уравнения (14) запишутся в виде

$$E\langle\langle g_q \mid a_q^+ \rangle\rangle = -\frac{q^2}{3}\langle\langle h_q \mid a_q^+ \rangle\rangle - \sqrt{\varepsilon}\sqrt{N_0}\frac{q^2}{3\theta}\frac{\nu(0)}{V}\sum_{k\neq 0}\frac{k^2}{2m} n_k(1+n_k)\langle\langle \varphi_q | a_q^+ \rangle\rangle, \tag{20}$$

$$E\langle\langle h_q \mid a_q^+ \rangle\rangle = -\frac{N_0}{V}\frac{\nu(0)}{m}\langle\langle g_q \mid a_q^+ \rangle\rangle,$$

откуда находим

$$\langle\langle h_q \mid a_q^+ \rangle\rangle = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{N_0}\frac{q^2}{3} C_0^2 \left\{E^2 - \frac{q^2}{3}C_0^2\right\}^{-1} \lambda \langle\langle \varphi_q | a_q^+ \rangle\rangle, \tag{21}$$

где

$$\lambda = \frac{\nu(0)}{\theta\nu}\left(\sum_{k\neq 0}\frac{k^2}{2m} n_k(1+n_k)\right)^2 \left(\sum_{k\neq 0} E_k^2 n_k (1+n_k)\right)^{-1} \tag{22}$$

и $C_0^2 = \frac{N_0}{V}\frac{\nu(0)}{m}$. Легко видеть, что $\lambda \to 0$ при $\theta \to 0$.

Подставляя (10) и (22) в уравнения (8), находим одночастичные функции Грина. При малых E и q будем иметь

$$\langle\langle a_q \mid a_q^+ \rangle\rangle \cong -\langle\langle a_{-q}^+ \mid a_q^+ \rangle\rangle \cong \frac{N_0}{V}\nu(0)\frac{E_2 - {}^1/_3\, C_0^2 q^2 (1-\lambda)}{E^4 - {}^4/_3\, E^2 C_0^2 q^2 + {}^1/_3 C_0^4 q^4 (1-\lambda)}. \tag{23}$$

Функции Грина (23) имеют полюса, соответствующие первому звуку и второму звуку

$$E_q^{(1)} = \pm C_0 q\left(1 + {}^1/_4\lambda\right), \quad E_q^{(2)} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} C_0 q\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right). \tag{24}$$

Выражения (23), полученные в рамках теории слабонеидеального бозе-газа, являются аналогом функций Грина, найденных в работе [5] на основе гидродинамики сверхтекучей жидкости.

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за внимание к работе.

Поступило
20 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Церковников, ДАН, 190, № 4 (1970). [2] Д. Н. Зубарев, УФН, 71, 71 (1960). [3] Ли Чжэн-Чжун, ДАН, 169, 1054 (1966). [4] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ., 11, 67 (1947). [5] Н. Н. Боголюбов, К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости, Препринт Объединен. инст. ядерн. исслед., 1963.