Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 3

УДК 539.4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН СССР Э. И. ГРИГОЛЮК,
Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Решение краевых задач теории оболочек в значительной степени затрудняется из-за отсутствия полных систем решений соответствующих уравнений. Исключение составляют лишь круговая цилиндрическая и сферическая оболочки, а также весьма пологие оболочки с прямоугольным планом, для которых известны частные решения соответственно в полугеодезических, полярных и декартовых координатах [1].

В настоящей статье на базе интегральных представлений решений уравнений теории пологих оболочек строится некоторая система регулярных решений, полная относительно любой конечной односвязной области на поверхности оболочки.

1. Общее решение системы дифференциальных уравнений технической теории пологих оболочек может быть представлено в виде

$$F(z,\zeta)=\sum_{i=0}^{1}\Big\{a_iG_i(z-z_0,\zeta-\zeta_0)+\int_{z_0}^{z}G_i(z-t,\zeta-\zeta_0)\varphi_i(t)\,dt+$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}G_i(z-z_0,\zeta-\tau)\psi_i(\tau)\,d\tau\Big\},\tag{1.1}$$

где $\varphi_i(z)$ и $\psi_i(\zeta)$ $(i=0,1)$ — произвольные аналитические функции своих аргументов; a_i — произвольные константы, а ядра $G_i(z,\zeta$ определяются формулами

$$G_0(z,\zeta)=G_0(\zeta,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}g_k'(\zeta),$$
$$G_1(z,\zeta)=G_1(\zeta,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}g_k(\zeta).\tag{1.2}$$

Функции $g_k(\zeta)$ могут быть представлены в различной форме:

а) в виде рядов

$$g_k(\zeta)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\zeta^{s+1}}{(s+1)!}C_{k,s}(\delta),\tag{1.3}$$

где

$$C_{2k,2s}=a_{k,s}=(k+s)!\sum_{j=0}^{\min(k,s)}\frac{(2\delta)^{2j}}{(2j)!\,(k-j)!\,(s-j)!},\quad C_{2k,2s+1}=C_{2k+1,2s}=0,$$
$$C_{2k+1,2s+1}=b_{k,s}=(k+s+1)!\sum_{j=0}^{\min(k,s)}\frac{(2\delta)^{2j+1}}{(2j+1)!(k-j)!\,(s-j)!};$$

б) в виде произведений

$$g_k(\zeta)=e^{\zeta}P_k(\zeta)+(-1)^{k+1}e^{-\zeta}P_k(-\zeta),\tag{1.4}$$

где $P_k(\zeta)$ — известные полиномы степени k.

Функции напряжений $U(x,y)$ и прогибов $w(x,y)$ выражаются через решение $F(z,\zeta)$ следующим образом:

$$F(z,\zeta)=F_1(z,\zeta)+iF_2(z,\zeta),\tag{1.5}$$

где

$$U(x, y) = F_1(z, \zeta), \quad w(x, y) = \varepsilon^* F_2(z, \zeta), \quad \varepsilon^* = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}, \quad |\alpha| \leqslant 1,$$

$$z = \frac{\beta\sqrt{i}}{a}(x+iy), \quad \zeta = \frac{\beta\sqrt{i}}{a}(x-iy), \quad \beta = \frac{\sqrt{\varepsilon(1-\alpha)}}{4},$$

$$\varepsilon = \frac{a^2}{Rh}\sqrt{12(1-\mu^2)}, \quad \alpha = \frac{R}{R_1};$$

E, μ, h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки; R, R_1 — радиусы кривизны срединной поверхности; x, y — декартовы координаты; a — характерный линейный размер.

Таким образом, функция напряжений и прогибы в оболочке, а следовательно, все усилия и смещения выражаются через комплексную функцию $F(z, \zeta)$, заданную представлением (1.1).

2. Введем функции

$$\Phi(z, \zeta) = L^0_{z,\zeta}\{\mu_0(z-z_0)\} =$$
$$= \frac{a_0}{2}G(z-z_0, \zeta-\zeta_0) + \int_{z_0}^{z} G(z-t, \zeta-\zeta_0)\,\mu_0(t-z_0)\,dt,$$
$$\psi(z, \zeta) = L^0_{z,\zeta}\{\mu_1(z_0-z)\} =$$
$$= \frac{a_1}{2}G(z_0-z, \zeta_0-\zeta) + \int_{z}^{z_0} G(t-z, \zeta_0-\zeta)\,\mu_1(z_0-t)\,dt, \qquad (2.1)$$
$$\Phi^*(z, \zeta) = L^0_{\zeta,z}\{\nu_0(\zeta-\zeta_0)\} =$$
$$= \frac{a_0}{2}G(z-z_0, \zeta-\zeta_0) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z-z_0, \zeta-\tau)\,\nu_0(\tau-\zeta_0)\,d\tau,$$
$$\psi^*(z, \zeta) = L'_{\zeta,z}\{\nu_1(\zeta_0-\zeta)\} =$$
$$= \frac{a_1}{2}G(z_0-z, \zeta_0-\zeta) + \int_{\zeta}^{\zeta_0} G(z_0-z, \tau-\zeta)\,\nu_1(\zeta_0-\tau)\,d\tau,$$

где ядро имеет вид

$$G(z, \zeta) = G_0(z, \zeta) + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)G_1(z, \zeta).$$

В силу (1.1) функции Φ, Ψ, Φ^* и Ψ^* являются решениями.

Ядро в представлениях (2.1) можно записать в форме

$$G(z, \zeta) = e^{z+\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\omega_k(\zeta) = G(\zeta, z), \qquad (2.2)$$

где $\omega_k(\zeta)$ — известная функция.

Например, если $\delta = 1$ (круговая цилиндрическая оболочка), то

$$\omega_k(\zeta) = \zeta^k / k!. \qquad (2.3)$$

Построим следующие решения уравнений теории пологих оболочек

$$\Phi_\gamma(z, \zeta) = L^0_{z,\zeta}\left\{\frac{z^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^z\right\}; \quad \Psi_\gamma(z, \zeta) = L'_{z,\zeta}\left\{\frac{(-z)^\gamma}{\Gamma(\gamma)}e^{-z}\right\},$$
$$\Phi^*_\gamma(z, \zeta) = L^0_{\zeta,z}\left\{\frac{\zeta^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^\zeta\right\}, \quad \Psi^*_\gamma(z, \zeta) = L'_{\zeta,z}\left\{\frac{(-\zeta)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{-\zeta}\right\}, \qquad (2.4)$$

причем будем предполагать пока, что $\operatorname{Re}\gamma > 0$.

Реализуя операторы (2.4), находим, учитывая (2.1) и (2.2),

$$\Phi_\gamma^*(z, \zeta) = \Phi_\gamma(\zeta, z), \quad \Psi_\gamma(z, \zeta) = \Phi_\gamma(-z, -\zeta),$$

$$\Psi_\gamma^*(z, \zeta) = \Phi_\gamma(-\zeta, -z), \quad \Phi_\gamma(z, \zeta) = e^{z+\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+\gamma}\omega_k(\zeta)}{\Gamma(k+\gamma+1)}, \tag{2.5}$$

$\Gamma(n)$ — гамма-функция Эйлера.

Таким образом, если функция $\Phi(z, \zeta)$ является решением, то решениями окажутся и функции $\Phi(\zeta, z)$, $\Phi(-z, -\zeta)$ и $\Phi(-\zeta, -z)$.

Формулы (2.5) дают аналитическое продолжение интегралов в (2.4) на все значения параметра γ, поэтому ограничение на γ можно снять.

При $\gamma = -n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ без труда находим из (2.5)

$$\Phi_{-n}(z, \zeta) = e^{z+\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\omega_{k+n}(\zeta). \tag{2.6}$$

Решения (2.5) можно трактовать как обобщенные положительные степени, так как при $\gamma = n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ функции (2.5) имеют в точке $z = 0$ $(\zeta = 0)$ нуль кратности n. При $\gamma = 0$ обобщенные степени совпадают с соответствующими ядрами.

Очевидно, система степеней Φ_n, Φ_n^*, Ψ_n и Ψ_n^* $(n = 0, 1, \ldots)$ представляет собой систему регулярных решений, полную относительно любой конечной односвязной области.

В качестве примера рассмотрим случай круговой цилиндрической оболочки $(\delta = 1)$. Находим из (2.5), учитывая (2.3),

$$\begin{gathered}\Phi_\gamma(z, \zeta) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\gamma/2} e^{z+\zeta}\mathbf{I}_\gamma(2\sqrt{z\zeta}), \quad \Psi_\gamma(z, \zeta) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\gamma/2} e^{-z-\zeta}\mathbf{I}_\gamma(2\sqrt{z\zeta}), \\ \Phi_\gamma^*(z, \zeta) = \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\gamma/2} e^{z+\zeta}\mathbf{I}_\gamma(2\sqrt{z\zeta}), \quad \Psi_\gamma^*(z, \zeta) = \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\gamma/2} e^{-z-\zeta}\mathbf{I}_\gamma(2\sqrt{z\zeta}),\end{gathered} \tag{2.7}$$

где $\mathbf{I}_\gamma(t)$ — модифицированная функция Бесселя порядка γ. Запись решений в форме (2.7) более симметрична, чем обычная форма представления решений для цилиндрической оболочки.

Аналогичным путем можно построить отрицательные обобщенные степени, т. е. решения, обладающие особенностями типа полюса в заданной точке.

Решения типа (2.5) могут быть использованы при решении краевых задач для пологой оболочки в виде купола, опирающегося на круговой план.

Поступило
14 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский, Перфорированные пластины и оболочки и связанные с ними проблемы. Обзор результатов, ВИНИТИ, М., 1967.