Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 3

МАТЕМАТИКА

Э. МУХАМАДИЕВ

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВРАЩЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 6 VI 1969)

Многие приложения топологических методов к исследованию разнообразных задач качественной теории дифференциальных уравнений и теории нелинейных операторных уравнений требуют вычисления или оценки вращения (см. ([1], [2])) векторных полей. Для широких классов векторных полей вычисление вращения сводится к вычислению степени достаточно простых отображений (см. ([1–4])). Однако в ряде случаев вычисление вращения требует преодоления специфических трудностей (укажем здесь работы ([5–8])).

В настоящей статье предлагаются теоремы, позволяющие оценить вращения векторного поля в новых случаях.

1. Пусть G — ограниченная область в вещественном четномерном эвклидовом пространстве R^{2n} с границей Γ. Точки этого пространства будем обозначать через

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}\}. \tag{1}$$

Пусть на G задано векторное поле

$$\Phi x = \{f_1(x), \ldots, f_{2n}(x)\}, \tag{2}$$

компоненты $f_i(x)$ которого являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Тогда поле (2) дифференцируемо на G в том смысле, что приращение $\Phi(x+h) - \Phi x$ $(x,\ x+h \in G)$ можно представить в виде

$$\Phi(x+h) - \Phi x = \Phi'(x)h + o(\|h\|),$$

где $\Phi'(x)$ — линейный оператор в R^{2n} или, что то же, $\Phi'(x)$ — квадратная матрица порядка $2n$.

Если поле (2) не имеет на границе Γ области G нулевых векторов, то определено вращение $\gamma(\Phi;\ \Gamma)$ этого поля на Γ. Вращение $\gamma(\Phi;\ \Gamma)$ — это степень отображения

$$Fx = \Phi x / \|\Phi x\| \qquad (x \in \Gamma)$$

границы Γ на единичную сферу.

Теорема 1. *Пусть поле* (2) *не имеет на* Γ *нулевых векторов. Пусть при каждом фиксированном* $x \in G$ *может быть указана такая квадратная матрица* $T(x)$ *порядка* $2n$ *без вещественных собственных значений, что*

$$\Phi'(x)T(x) = T(x)\Phi'(x) \qquad (x \in G). \tag{3}$$

Тогда

$$\gamma(\Phi;\ \Gamma) \geqslant 0.$$

Эта теорема охватывает как частный случай известное утверждение (см. ([8])) о неотрицательности степени аналитических отображений в комплексных пространствах. Действительно, если R^{2n} совпадает с n-мерным комплексным пространством C^n и если координаты в (1) занумерованы так, что точка (1) в пространстве R^{2n} соответствует точке $\{x_1 +$

$+ ix_2,\ x_3 + ix_4, \ldots, x_{2n-1} + ix_{2n}\}$ в пространстве C^n, то для аналитических отображений Ф в C^n условия (3) выполняются при постоянной матрице T, где

$$Tx = \{x_1 - x_2,\ x_1 + x_2, \ldots, x_{2n-1} - x_{2n},\ x_{2n-1} + x_{2n}\}.$$

Равенство (3) в этом случае совпадает с условием Коши — Римана для функций многих комплексных переменных ([9]).

Пусть поле (2) порождено непрерывно дифференцируемым отображением k-мерного пространства кватернионов в себя. Это пространство, очевидно, является $4k$-мерным вещественным пространством. Тогда поле Ф удовлетворяет условию (3) с постоянной матрицей

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & T_k \end{pmatrix},$$

где

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как нетрудно видеть, матрица T не имеет вещественных собственных значений. Поэтому из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть дифференцируемое в кватернионном пространстве E векторное поле Ф не обращается в нуль на границе Г ограниченной области.*

Тогда $\gamma(\Phi;\ \Gamma) \geqslant 0$.

2. Теорема 3. *Пусть на границе Г области $G \subset R^{2n}$ поле Ф не имеет нулевых векторов. Пусть при каждом фиксированном $x \in G$ может быть указана такая квадратная матрица $T(x)$ порядка $2n$ без вещественных собственных значений, что*

$$\Phi'(x)T(x) = -T(x)\Phi'(x) \quad (x \in G).$$

Тогда

$$(-1)^n \gamma(\Phi;\ \Gamma) \geqslant 0.$$

3. Непрерывное отображение U сферы S^n ($\|x\| = 1,\ x \in R^{n+1}$) в себя называют периодическим с периодом p, если $U^i \neq I,\ i = 1, \ldots, p-1$, и $U^p = I$. Периодическое отображение является гомеоморфизмом сферы S^n в себя. Наряду с отображением U на S^n рассмотрим периодическое отображение V периода q, где q — делитель p. Через γ_U и γ_V обозначим соответственно степени отображений U и V сферы S^n на себя.

Теорема 4. *Пусть U и V являются симплициальными отображениями относительно некоторых разбиений сферы S^n. Пусть $U, U^2, \ldots, U^{p-1}$ не имеют на S^n неподвижных точек. Пусть*

$$\gamma_U \cdot \gamma_V = 1.$$

Пусть непрерывные векторные поля Ф и Ψ без нулевых векторов на S^n удовлетворяют условиям

$$\frac{\Phi U^i x}{\|\Phi U^i x\|} \neq -V^i\left(\frac{\Phi x}{\|\Phi x\|}\right) \quad (i = 1, \ldots, p-1); \tag{4}$$

$$\frac{\Psi U^i x}{\|\Psi U^i x\|} \neq -V^i\left(\frac{\Psi x}{\|\Psi x\|}\right) \quad (i = 1, \ldots, p-1). \tag{5}$$

Тогда

$$\gamma(\Phi;\ S^n) = \gamma(\Psi;\ S^n) \pmod p.$$

Если отображение V имеет на S^n неподвижную точку x_0, то условию (5) удовлетворяет векторное поле $\Psi x \equiv x_0$. Следовательно, в этом случае из (4) вытекает, что $\gamma(\Phi;\ S^n) = o(\operatorname{mod} p)$.

Теорема 5. *Пусть U и V — отображения сферы S^n в себя (не обязательно периодические). Пусть $\gamma_U \cdot \gamma_V = -1$. Пусть, наконец, непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов на S^n удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi U x}{\| \Phi U x \|} \neq -V\left(\frac{\Phi x}{\| \Phi x \|}\right).$$

Тогда

$$\gamma(\Phi;\ S^n) = 0.$$

Теоремы 4 и 5 дополняют и развивают результаты М. А. Красносельского, изложенные в ([6]). Доказательство теоремы 4 использует эти результаты из ([6]).

4. В заключение рассмотрим векторное поле Φ в двумерной плоскости. Пусть U и V — такие отображения окружности S^1 в себя периодов p и q, где $p = dq$, что $U, U^2, \ldots, U^{p-1}, V, V^2, \ldots, V^{q-1}$ не имеют на S^1 неподвижных точек.

Теорема 6. *Пусть непрерывное векторное поле Φ на S^1 не имеет нулевых векторов и удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi U^i x}{\| \Phi U^i x \|} \neq -V^i\left(\frac{\Phi x}{\| \Phi x \|}\right) \quad (x \in S^1,\ i = 1, \ldots, p-1).$$

Тогда

$$\gamma(\Phi;\ S^1) = d(\operatorname{mod} p).$$

Автор выражает искреннюю благодарность М. А. Красносельскому, под руководством которого он работает.

Воронежский
государственный университет

Поступило
5 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М., 1947. [2] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956. [3] С. Лефшец, Алгебраическая топология, М., 1949. [4] П. Хилтон, С. Уайли, Теория гомологий, М., 1966. [5] P. Smith, Am. J. Math., (2), 42 (1941). [6] М. А. Красносельский, ДАН, 101, № 3 (1955). [7] Т. П. Забрейко, М. А. Красносельский, Сибирск. матем. журн., 5, № 3 (1964). [8] J. Cronin, Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis, Providence, 1964. [9] В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.