Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 3

УДК 533.7

ФИЗИКА

А. Д. ХОНЬКИН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И ВЫЧИСЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 7 IV 1969)

Пространственно-временные корреляционные функции и, в частности, следующие функции классического однокомпонентного газа ([1])

$$\tilde{G}^{(00)}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{n}(0, 0)\,\hat{n}(\mathbf{r}, t)\rangle, \quad \tilde{G}^{(01)}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{P}_\alpha(0, 0)\,\hat{P}_\alpha(\mathbf{r}, t)\rangle,$$
$$\tilde{G}^{(02)}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Pi}_{\alpha\beta}(0, 0)\hat{\Pi}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)\rangle, \quad \tilde{G}^{(11)}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{S}_\alpha(0, 0)\,\hat{S}_\alpha(\mathbf{r}, t)\rangle \qquad (1)$$

в больцмановском пределе можно представить в виде

$$\tilde{G}^{(\mu\nu)}(\mathbf{r}, t) = (\psi_{\mu\nu}, \tilde{g}_{\mu\nu}), \qquad (2)$$

где функции $\tilde{g}_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \xi, t)$ удовлетворяют линеаризованному уравнению Больцмана

$$\partial\tilde{g} / \partial t + \xi\,\partial\tilde{g} / \partial\mathbf{r} = J(\tilde{g}) \qquad (3)$$

и начальным условиям

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(t = 0) = \psi_{\mu\nu}\delta(\mathbf{r}), \qquad (4)$$

а $\psi_{\mu\nu}(\xi_x, \xi^2)$ ортонормированная система полиномов Барнетта ([2]), полная в гильбертовом пространстве $L^2(\omega)$ функций $\varphi(\xi_x, \xi^2)$ со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \omega\varphi_1\bar{\varphi}_2 d^3\xi, \quad \omega(\xi) = (2\pi)^{-3/2}\exp(-\xi^2/2). \qquad (5)$$

В соотношениях (1) введены безразмерные динамические переменные, зависящие от безразмерных координат, импульсов и времени (приведение последних к безразмерному виду стандартное, ср. ([2])), причем числовые множители выбраны так, чтобы при $t = 0$ функции $\tilde{G}_{\mu\nu}$ обращались в δ-функции (функции $\hat{P}_\alpha$, $\hat{\Pi}_{\alpha\beta}$, $\hat{S}_\alpha$ домножаются на $(1/3)^{1/2}$, $(1/10)^{1/2}$, $(5/6)^{1/2}$ соответственно). В (1) $\hat{n}(\mathbf{r})$, $\hat{P}_\alpha(\mathbf{r})$, $\hat{\Pi}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$, $\hat{S}_\alpha(\mathbf{r})$ — динамические переменные плотностей числа частиц, импульса, бездивергентной части тензора потока импульса и потока энергии (эти обозначения соответствуют работе ([1])).

Переходя к фурье-представлению по пространственным переменным, задачу Коши (3), (4) приведем к виду

$$\partial g / \partial t = J(g) - ik\xi_x g, \quad g_{\mu\nu}(k, \xi, t = 0) = \psi_{\mu\nu}, \qquad (6)$$

причем преобразованные функции $G^{(\mu\nu)}(k, t)$ и $g_{\mu\nu}(k, \xi, t)$ связаны между собой теми же соотношениями (2), если в них убрать знак тильды. Безразмерное волновое число k по порядку величины равно отношению длины свободного пробега к длине волны рассматриваемой фурье-компоненты, т. е. числу Кнудсена.

Будем рассматривать линеаризованный оператор столкновений

$$J(g) = \int \omega(\xi_1)\,[g(\xi_1') + g(\xi') - g(\xi_1) - g(\xi)]\, B(\theta, U)\, d\varepsilon\, d\theta\, d^3\xi_1 \tag{7}$$

как оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\omega)$. Область определения $D(J)$ оператора J плотна в $L^2(\omega)$ и оператор J симметричен и неположителен, т. е.

$$(g, Jf) = (Jg, f), \quad (Jg, g) \leqslant 0, \quad g, f \in \mathscr{D}(J), \tag{8}$$

причем из равенства $(Jg, g) = 0$ следует, что g является линейной комбинацией функций ψ_{00}, ψ_{01}, ψ_{10} (H — теорема Больцмана), т. е. нуль является трехкратно вырожденным собственным значением оператора J.

Для молекул, описываемых степенным потенциалом взаимодействия, соответствующим силам отталкивания, с показателем степени, бо́льшим 4, и конечным радиусом действия или потенциалом с жесткой сердцевиной и конечным радиусом действия, оператор J имеет непрерывный спектр, содержащийся в интервале $(-\infty, -\nu_0)$, $\nu_0 > 0$ ([4–6]). Кроме того, для потенциалов с жесткой сердцевиной в интервале $(-\nu_0, 0)$ имеются собственные значения конечной кратности ([7]), большое число которых найдено численно ([8]).

В случае максвелловских молекул сечение $B(\theta, U)$ не зависит от U и оператор J имеет дискретный спектр собственных значений $\lambda_{\mu\nu}$, которым соответствует полная в $L^2(\omega)$ система собственных функций $\psi_{\mu\nu}(\xi)$.

Используя свойство полуограниченности оператора $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varepsilon) = J + \varepsilon\xi_x$, $\varepsilon = -ik$:

$$\operatorname{Re}(\mathscr{L}f, f) \leqslant 0, \quad f \in \mathscr{D}(\mathscr{L}), \tag{9}$$

можно доказать теорему существования и единственности решения следующей задачи Коши для линеаризованного уравнения Больцмана:

$$\partial g / \partial t = \mathscr{L}g + \varphi_1, \quad g(t = 0) = \varphi_2. \tag{10}$$

Т е о р е м а ([3]). *Пусть* $\varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ *и функция* $\varphi_1(t) \in L^2(\omega)$ *непрерывно дифференцируема по* t. *Тогда в* $L^2(\omega)$ *существует единственная функция* $g(t)$, *обладающая следующими свойствами:* а) $g(t) \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$, $g(t)$ *непрерывно дифференцируема по* t; б) $(d/dt)g(t) = \mathscr{L}g(t) + \varphi_1(t)$; в) $\lim\limits_{t\to 0} \|g(t) - \varphi_2\| = 0$.

Предположим, что известен спектр и ортонормированные собственные функции оператора $\mathscr{L}$, т. е. известны решения уравнения

$$\mathscr{L}(\varepsilon)\psi_{\mu\nu}(\varepsilon) = \lambda_{\mu\nu}(\varepsilon)\psi_{\mu\nu}(\varepsilon), \tag{11}$$

образующие полную систему в пространстве $L^2(\omega)$.

Тогда решение задачи (10) имеет вид

$$g = \sum_{(\mu\nu)} \alpha_{\mu\nu}(t) \exp[\lambda_{\mu\nu}(\varepsilon)t]\, \psi_{\mu\nu}(\varepsilon),$$
$$\alpha_{\mu\nu}(t) = (\varphi_2, \varphi_{\mu\nu}(\varepsilon)) + \int_0^t e^{-\lambda_{\mu\nu}(\varepsilon)\tau} (\varphi_1(\tau), \varphi_{\mu\nu}(\varepsilon))\, d\tau, \tag{12}$$

где $\varphi_{\mu\nu}(\varepsilon) = \overline{\psi_{\mu\nu}(\varepsilon)}$ — собственная функция сопряженного оператора $\mathscr{L}^*(\varepsilon) = \mathscr{L}(\bar{\varepsilon})$, принадлежащая собственному значению $\overline{\lambda_{\mu\nu}(\varepsilon)}$.

Дальнейшее рассмотрение проведем для максвелловских молекул и для случая, когда функции φ_1 и φ_2 являются конечными линейными комбинациями собственных функций $\psi_{\mu\nu}$ оператора J. Для построения приближенного решения используем малость параметра k и применим теорию возмущений для определения решений уравнения (11). Хотя условия применимости теории возмущений ([9]) в случае максвелловских молекул не выполняются, будет показано, что построенное решение является асимптотическим при $k \to 0$. Подставляя в (11) разложения

$$\lambda_{\mu\nu}(\varepsilon) = \lambda_{\mu\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_{\mu\nu}^{(k)}, \quad \psi_{\mu\nu}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_{\mu\nu}^{(k)}, \tag{13}$$

для определения поправок $\psi_{\mu\nu}^{(k)}$ и $\lambda_{\mu\nu}^{(k)}$ имеем уравнения

$$(J - \lambda_{\mu\nu})\psi_{\mu\nu}^{(k)} = -\xi_x \psi_{\mu\nu}^{(k-1)} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{\mu\nu}^{(k-m)} \psi_{\mu\nu}^{(m)}, \quad \lambda_{\mu\nu}^{(k)} = (\psi_{\mu\nu}^{(0)}, \xi_x \psi_{\mu\nu}^{(k-1)}). \tag{14}$$

Представим решение задачи Коши (10) в виде

$$g = g_1 + g^{(n)}, \tag{15}$$

где функция $g^{(n)}$ определяется формулами (12), в которых вместо чисел $\lambda_{\mu\nu}(\varepsilon)$ и функций $\psi_{\mu\nu}(\varepsilon)$ взяты выражения

$$\lambda_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \lambda_{\mu\nu}^{(k)}, \quad \Psi_{\mu\nu}^{\prime(n)}(\varepsilon) = \frac{\psi_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon)}{\| \psi_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon) \|}, \quad \psi_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \psi_{\mu\nu}^{(k)}. \tag{16}$$

Функция g_1 является решением задачи Коши

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \mathscr{L} g_1 + h_1, \quad g_1(t=0) = h_2 = \varphi_2 - \sum_{(\mu\nu)} (\varphi_2, \Phi_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon)) \Psi_{\mu\nu}^{\prime(n)}(\varepsilon); \tag{17}$$

$$h_1 = \varphi_1 - \sum_{(\mu\nu)} (\varphi_1, \Phi_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon)) \Psi_{\mu\nu}^{\prime(n)}(\varepsilon) + \sum_{(\mu\nu)} \alpha_{\mu\nu}^{(n)}(t) \exp[\lambda_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon) t] \times$$
$$\times [\mathscr{L} - \lambda_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon)] \Psi_{\mu\nu}^{\prime(n)}(\varepsilon). \tag{18}$$

Используя выражения (14), находим

$$(\mathscr{L} - \lambda_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon)) \psi_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon) = \varepsilon^{n+1} \xi_x \psi_{\mu\nu}^{(n)} + \sum_{p=1}^{n} \varepsilon^{n+p} \sum_{m=0}^{n-p} \lambda_{\mu\nu}^{(p+m)} \psi_{\mu\nu}^{(n-m)}, \tag{19}$$

откуда следует, что

$$|(\Psi_{\mu\nu}^{\prime(n)}(\varepsilon), \Psi_{\mu'\nu'}^{\prime(n)}(\varepsilon))| = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} + O(|\varepsilon|^{n+1}). \tag{20}$$

Так как функция $\xi_x \psi_{\mu\nu}$ является конечной линейной комбинацией функций $\psi_{\mu\nu}$, то и функции $\psi_{\mu\nu}^{(k)}$ по построению обладают этим свойством. Поэтому из (19) и (20) следует $\|h_1\| \leqslant C_1 |\varepsilon|^{n+1}$, $\|h_2\| \leqslant C_2 |\varepsilon|^{n+1}$, откуда в силу теоремы существования и единственности вытекает $\|g_1\| \leqslant M |\varepsilon|^{n+1}$, т. е. следующее условие асимптотической сходимости метода решения задачи Коши при помощи теории возмущений:

$$\lim_{k \to 0} \frac{1}{k^n} \| g - g^{(n)} \| = 0. \tag{21}$$

Отметим, что для всех вычисленных поправок к собственным числам имеет место неравенство $(-1)^n \lambda_{\mu\nu}^{(2n)} < 0$, т. е. можно считать $\operatorname{Re} \lambda_{\mu\nu}^{(n)}(-ik) < 0$ (ср. также ([2])). Числа $\lambda_{\mu\nu}^{(n)}(\varepsilon)$ являются корнями дисперсионного уравнения для линеаризованного уравнения Больцмана. Формула (12) показывает, каким образом эти корни появляются в решении задачи Коши для линеаризованного уравнения Больцмана. По-видимому, это свойство является прямым следствием полуограниченности оператора $\mathscr{L}$, однако его доказательство в общем случае неизвестно. Тогда соотношение (21) справедливо равномерно по t, $t \in [0, \infty)$.

В случае жестких сферических молекул, кроме дискретного спектра, имеется непрерывный спектр оператора J, однако если система собственных функций, принадлежащих дискретному спектру, полна в $L^2(\omega)$, то решение задачи Коши также можно построить, используя теорию возмущений, тем более, что в этом случае ряды теории возмущений, определяющие собственные числа и функции, сходятся ([10]).

Используя приближенные собственные функции и числа (16), выражения для корреляционных функций представим в виде

$$G^{(\mu\nu)}(k, t) = \sum_{(pl)} |(\psi_{\mu\nu}, \Psi_{pl}^{(n)}(\varepsilon))|^2 \exp[\lambda_{pl}^{(n)}(\varepsilon) t]. \tag{22}$$

При конечном n ряд (22) является конечным, ибо функция $\psi_{\mu\nu}$ входит лишь в конечное число функций $\Psi_{pl}^{(n)}(\varepsilon)$. Все члены ряда (22) экспоненциально убывают с течением времени, что подтверждает обычно принимаемую гипотезу об экспоненциальном убывании корреляционных функций.

Дискретный спектр линеаризованного оператора столкновений для максвелловских молекул состоит из простых, двукратно вырожденных ($\lambda_{\mu 0} = \lambda_{\mu-1,1}$) и двух трехкратно вырожденных ($\lambda_{00} = \lambda_{01} = \lambda_{10} = 0$, $\lambda_{02} = \lambda_{30} = \lambda_{21}$) собственных чисел. Соответственно числа $\lambda_{\mu\nu}(-ik) = r_{\mu\nu}(k) + ij_{\mu\nu}(k)$ можно разбить на действительные и комплексные. Действительными являются числа $\lambda_{\mu\nu}(-ik)$ с $\nu \neq 0,1$ (сюда же входит $\lambda_{02}(-ik)$) и $\lambda_{00}(-ik)$. Все остальные числа комплексные, причем $\lambda_{\mu 0}(-ik) = \overline{\lambda_{\mu-1,1}(-ik)}$. Кроме того, можно показать, что имеет место $|(\psi_{\mu\nu}, \Psi_{p0}^{(n)}(-ik))|^2 = |(\psi_{\mu\nu}, \Psi_{p-1,1}^{(n)}(-ik))|^2$, так что выражение (22) представимо в виде

$$G^{(\mu\nu)}(k, t) = \sum_{\substack{(pl)\\(l\neq 0,1)}} |(\psi_{\mu\nu}, \Psi_{pl}^{(n)}(-ik))|^2 \exp[r_{pl}^{(n)}(k) t] + 2\sum_{p=1}^{\infty} |(\psi_{\mu\nu}, \Psi_{p0}^{(n)}(-ik))|^2 \exp[r_{p0}^{(n)}(k) t] \cos j_{p0}(k) t. \tag{23}$$

Совершая еще преобразование Лапласа по времени, из (22) получаем

$$G^{(\mu\nu)}(k, z) = \sum_{(pl)} \frac{|(\psi_{\mu\nu}, \Psi_{pl}^{(n)}(-ik))|^2}{z - \lambda_{pl}^{(n)}(-ik)}. \tag{24}$$

Из (24) легко получить выражение для спектральной функции интенсивности рассеянного света $S(k, \omega)$. Для этого следует положить в (24) $z = i\omega$, $(\mu\nu) = (00)$ и взять действительную часть полученной функции.

Автор выражает благодарность Д. Н. Зубареву, В. Б. Лидскому и Б. В. Пальцеву за ценное обсуждение.

Поступило
31 III 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Хонькин, ДАН, 183, 1285 (1968). [2] L. Sirovich, Phys. Fluids, 6, 10 (1963). [3] G. Scharf, Helv. phys. acta, 40, 929 (1967). [4] H. Grad, Phys. Fluids, 6, 147 (1963). [5] А. А. Арсеньев, ДАН, 165, 1104 (1965). [6] J. R. Dorfman, Proc. Nat. Acad. Sci., 50, 804 (1963). [7] G. W. Ford, M. Schreiber, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 60, 802 (1968). [8] C. L. Pekeris et al., Phys. Fluids, 5, 1608 (1962). [9] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954. [10] А. А. Арсеньев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, 375 (1966).