Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 4

УДК 513.88 : 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Ю. И. ЛЮБИЧ, В. А. ТКАЧЕНКО

КРИТЕРИЙ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(*Представлено академиком В. И. Смирновым 7 I 1969*)

Настоящая заметка представляет собой попытку распространения критерия квазианалитичности Карлемана ([1], [2]) на линейные операторы в банаховом пространстве. Речь будет идти об условиях, при которых из неравенств вида

$$\|A^n x\| \leqslant m_n \|x\| \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

следует $x = 0$. Классическая квазианалитичность соответствует случаю, когда $A = \frac{1}{i}\frac{d}{ds}$ в пространстве $C[0, 1]$ с граничным условием $x(0) = 0$. Для более общих дифференциальных операторов проблема квазианалитичности изучалась в работах ([3-5]).

Упомянутый выше оператор дифференцирования неограничен и не имеет спектра. Эти свойства следует удержать в общей постановке задачи: если на некотором ненулевом инвариантном подпространстве E оператор A ограничен, то $\|A^n x\| \leqslant C^n \|x\|$ ($x \in \mathrm{E}$, $C = \|A|\mathrm{E}\|$); таким образом, даже при $m_n = C^n$ неравенством (1) будет удовлетворять вектор $x \neq 0$.

Если оператор A не имеет спектра, то его резольвента $R(\lambda)$ — целая функция, и естественно связывать свойства оператора с ростом $R(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$. Для оператора дифференцирования функция $R(\lambda)$ — экспоненциального типа, ограниченная на мнимой оси. Мы будем исходить из этого наблюдения.

Пусть A — оператор без спектра. Ряд Тейлора его резольвенты имеет вид

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{-k-1}\lambda^k.$$

Положим $M_A(r) = \max\limits_{|\lambda|=r} \|R(\lambda)\|$ ($r > 0$). Функция $M_A(r)$ при $r \to \infty$ растет быстрее любой степени r. Введем обычную характеристику роста последовательности $\{m_n\}$:

$$T(r) = \sup_n \frac{r^{n-1}}{m_n}.$$

Лемма 1. *Если существует вектор $x \neq 0$, для которого выполнены неравенства* (1), *то*

$$T(r) \leqslant M_A(r). \tag{2}$$

Доказательство. Примем $\|x\| = 1$. Тогда

$$1 = \|A^{-n}A^n x\| \leqslant \|A^{-n}\| m_n \leqslant M_A(r) r^{-n+1} m_n \tag{3}$$

в силу неравенств Коши. Неравенство (2) следует из (3).

В силу леммы 1 из неравенств (1) будет следовать $x = 0$ всякий раз, когда функция $T(r)$ в некоторой шкале растет быстрее, чем $M_A(r)$. Например:

Теорема 1. *Если при некотором* $\rho > 0$

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\rho}}\,dr = \infty, \tag{4}$$

в то время как

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_A(r)}{r^{1+\rho}}\,dr < \infty, \tag{5}$$

то из неравенств (1) *следует* $x = 0$.

Условие (4) означает, что последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет классическому критерию квазианалитичности «при порядке ρ» (см. [6], стр. 55—56). Теорема 1 точна в следующем смысле.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(t)$ — *положительная логарифмически выпуклая функция. Пусть при некотором* $\rho > 0$

$$\int_1^\infty \frac{\ln \psi(t)}{t^{1+\rho}}\,dt = \infty. \tag{6}$$

Тогда существует оператор A *в гильбертовом пространстве, не имеющий спектра и такой, что*: 1) $\|R(\lambda)\| \leqslant \psi(|\lambda|)$; 2) *для некоторого* $x \neq 0$ *последовательность* $m_n = \|A^n x\|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *удовлетворяет условию квазианалитичности* (4).

Доказательство основано на существовании последовательностей $\{\alpha_n\}_0^\infty$ и $\{m_n\}_{-\infty}^\infty$ положительных чисел, для которых

$$\sum_{n=0}^\infty \alpha_n^{-1} t^n \leqslant \psi(t) \ (t \geqslant 0),$$

$$\alpha_k m_n \leqslant m_{k+n+1} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и $\{m_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию (4). В гильбертовом пространстве последовательностей $\xi = \{\xi_n\}_{-\infty}^\infty$ с нормой

$$\|\xi\| = \Big(\sum_{n=-\infty}^\infty |\xi_n|^2 m_n^2\Big)^{1/2}$$

оператор правого сдвига $A\xi = \{\xi_{n-1}\}_{n=-\infty}^\infty$ обладает всеми требуемыми свойствами. В качестве x следует взять координатный орт $\{\delta_{n0}\}$.

Сформулируем теперь основной критерий квазианалитичности при порядке $\rho \leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть оператор* A *не имеет спектра и*

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln M_A(r) < \infty \quad (0 < \rho \leqslant 1).$$

Пусть, далее, на двух лучах $\arg\lambda = \theta_1$, $\arg\lambda = \theta_2$, $\theta_2 - \theta_1 \equiv \equiv \pi\rho^{-1} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ *имеет место оценка* $\|R(\lambda)\| \leqslant \psi(|\lambda|)$, *где* $\psi(t)$ $(t \geqslant 0)$ — *положительная непрерывная неубывающая функция, для которой*

$$\int_1^\infty \frac{\ln \psi(t)}{t^{1+\rho}} \ln t\,dt < \infty. \tag{7}$$

Тогда для того чтобы из неравенств (1) *следовало* $x = 0$, *достаточно, а при* $\sigma > 0$ *и необходимо, чтобы выполнялось условие квазианалитичности* (4).

Согласно теореме 2 критерий квазианалитичности (4) утрачивается при нарушении условия

$$\int_1^\infty \frac{\ln \psi(t)}{t^{1+\rho}}\,dt < \infty, \tag{8}$$

более слабого чем (7). Однако нам не известно, можно ли условие (7) в теореме 3 заменить условием (8).

Отметим еще, что условие (4) в случае $\sigma = 0$ не является необходимым.

Доказательство теоремы 3 использует тот факт (см. [7]), что при $\rho = 1$, $\arg \lambda = 0, \pi$ рост резольвенты на вещественной оси может быть погашен умножением на функцию вида

$$\varphi(\lambda) = \int_0^a e^{i\lambda t} g(t)\, dt \quad (a > 0).$$

Благодаря этому можно образовывать функции от A вида

$$\tilde{\omega}(t;\ A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda) R(\lambda)\, \omega(\lambda)\, d\lambda,$$

где $\omega(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ может иметь любой степенной рост.

При доказательстве достаточности (в случае $\rho = 1$) мы берем $\omega(\lambda) = 1$ и устанавливаем, что в силу (1)

$$\left\| \frac{d^n}{dt^n} \tilde{\omega}(t;\ A)\, x \right\| \leqslant \mathrm{const} \cdot m_n \|x\|.$$

Тогда из теоремы Карлемана следует $\tilde{\omega}(t;\ A)x = 0$ $(t < 0)$. Обращая (9), мы получаем представление

$$R(\lambda)\, x = \frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_0^b e^{i\lambda t} \tilde{\omega}(t;\ A)\, x\, dt,$$

где $b > 0$. По теореме сложения индикатора ([8], стр. 208) функция $R(\lambda)x$ в верхней полуплоскости имеет нулевой экспоненциальный тип. Аналогичное заключение можно получить для нижней полуплоскости. После этого, благодаря условию (7), дело сводится к теореме 1.

При доказательстве необходимости роль $\omega(\lambda)$ играет преобразование Фурье финитной функции из соответствующего квазианалитического класса. Требуемый вектор $x \neq 0$, для которого выполняются оценки (1), получается в виде $\tilde{\omega}(t;\ A)y$ при некотором y и некотором t.

При наличии спектра у оператора A проблема квазианалитичности отпадает, но возникает проблема полноты.

Т е о р е м а 4. *Пусть резольвента $R(\lambda)$ мероморфна. Положим*

$$m_A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \| R(re^{i\theta}) \|\, d\theta, \qquad \sigma = \varlimsup_{r\to\infty} r^{-\rho} m_A(r) \quad (0 \leq \rho < 1).$$

Пусть $\sigma < \infty$ и на двух лучах $\arg \lambda = \theta_1$, $\arg \lambda = \theta_2$ выполнены условия теоремы 3. Пусть, далее, выполнено условие квазианалитичности (4). Тогда линейная оболочка корневых векторов оператора A плотна в множестве векторов, удовлетворяющих неравенствам (1).

Эта теорема доказывается тем же методом, что и теорема 3. Подчеркнем, что случай $\rho > 1$ за пределами теорем 1, 2 остается не исследованным.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького
Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
19 XII 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. C a r l e m a n, Les Fonctions Quasi-Analitiques, Paris, 1926. [2] A. O s t r o w s k i, Acta Math., 53 (1930). [3] В. И. М а ц а е в, Л. И. Р о н к и н, Уч. зап. Харьковск. гос. унив. и Харьковск. матем. общ., 27, сер. 4 (1961). [4] А. А. [illegible], Сборн. Исследования по современным проблемам теории функций, М., 1961. [5] В. Г. Х р ы п т у н, Сибирск. матем. журн., 6, № 6 (1965). [6] С. М а н д е л ь б р о й т, Примыкающие ряды, ИЛ, 1955. [7] A. B e u r l i n g, P. M a l l i a v i n, Acta Math., 107, 3—4 (1962). [8] Б. Я. Л е в и н, Распределение корней целых функций, М., 1956.