Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 4

УДК 519.52 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. А. ЛЯПУНОВ

# О НАКРЫТИИ $A$-МНОЖЕСТВ И КРАТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ

Задачи о накрытии $A$-множеств рассматривались в ряде работ Н. Н. Лузина, В. И. Гливенко, П. С. Новикова, З. И. Козловой и др. ([1-6]). Речь идет о том, что плоское $A$-множество, все сечения которого, параллельные оси $OY$, обладают некоторым специальным свойством, может быть накрыто таким $B$-множеством, все сечения которого, параллельные оси $OY$, обладают аналогичным свойствам. При решении этих задач используются те или иные теоремы отделимости.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы показать, что первая общая теорема о кратной отделимости ([7]) ведет к некоторой теореме о накрытии $A$-множеств, охватывающей ряд результатов, которые ранее устанавливались независимо друг от друга. Тот же метод, но только при использовании второй общей теоремы о кратной отделимости, приводит к установлению некоторых новых свойств плоских $A$-множеств.

Мы будем рассматривать подмножества пространства Бэра $I_{xy}$. Обозначим через $\delta_{n_1 \ldots n_k}$ интервалы Бэра пространства $I_y$. Пусть $H$ — некоторый наследственный класс линейных множеств и $E \subset I_{xy}$. Пусть $\mathrm{Pr}_x E$ обозначает проекцию множества $E$ на пространство $I_x$ и $E^x$ — полный прообраз точки $x$ при этом проектировании. Положим $E_y^H = \bigcup\limits_{\substack{x \\ E^x \in H}} E^x$. Через $\bar{U}$ мы обозначим замыкание множества $U$. Положим $\tilde{E}_y = \bigcup\limits_x \bar{E}^x$.

Основная конструкция. Пусть $E \subset I_{xy}$, положим

$$E_{n_1 \cdots n_k} = E \bigcap (I_x \times \delta_{n_1 \cdots n_k}), \quad U_{n_1 \cdots n_k} = \mathrm{Pr}_x E_{n_1 \cdots n_k},$$
$$V_{n_1 \cdots n_k} = E_{n_1 \cdots n_k} \times \delta_{n_1 \cdots n_k}.$$

Заметим, что

$$\tilde{E}_y = \bigcap_k \bigcup_{n_1 \ldots n_k} V_{n_1 \cdots n_k} \quad \mathrm{Pr}_x E = A \{ \bigcup_{n_1 \cdots n_k} \}.$$

Пусть $A^H \{B_{n_1 \cdots n_k}\}$ обозначает $\delta s$-операцию над множествами, занумерованными всевозможными кортежами натуральных чисел, база которой состоит из всех цепей, каждая из которой является объединением замкнутого множества $A$-цепей, не являющегося замыканием множества, обладающего свойством $H$.

Допустим, что существует система множеств $\{S_{n_1 \ldots n^k}\}$ таких, что

$$S_{n_1 \cdots n_k} \supset U_{n_1 \cdots nk} \Big/ \mathop{A^H}_{m_1 \ldots m_s} \{U_{n_1 \cdots n_k\, m_1 \cdots m_s}\},$$
$$A^H \{S_{n_1 \cdots n_k}\} = \phi.$$

Тогда, если

$$G_{n_1 \cdots n_k} = S_{n_1 \cdots n_k} \times \delta_{n_1 \cdots n_k},$$
$$G = \bigcap_k \bigcup_{n_1 \ldots n_k} G_{n_1 \cdots n_k},$$

то все множества вида $G^x$ суть замыкания множеств класса $H$, и если $E^{x_0} \in H$, то $\bar{E}^{x_0} \subset G$.

Описанная конструкция приводит к следующим теоремам:

В т о р а я   т е о р е м а   о   н а к р ы т и и   $A$ - м н о ж е с т в. *Пусть $H$ — наследственный класс множеств такой, что δs-операция* $A^{H}\{B_{n_1 \cdots n_n}\}$ *и все ее урезанные операции* $\underset{m_1 \ldots m_s}{\overset{H}{A}}\{B_{n_1 \cdots n_k\, m_1 \cdots m_s}\}$ *слабее $A$-операции. (Это значит, что они не сильнее $A$-операции и сравнимы с ней.) Тогда, каково бы ни было $A$-множество $E \subset I_{xy}$, всегда существует $CA$-множество $G$, все подмножества которого вида $G^x$ суть замыкания множеств класса $H$ и которое содержит все множества вида $E^x$, принадлежащие классу $H$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно сослаться на то, что в силу 2-й теоремы о кратной отделимости в условиях данной теоремы можно считать, что все множества $S_{n_1 \cdots n_k}$ являются $CA$-множествами. Отсюда сразу следует, что $G$ также является $CA$-множеством.

Аналогично доказывается

П е р в а я   т е о р е м а   о   н а к р ы т и и   $A$ - м н о ж е с т в. *Допустим, что при соблюдении всех условий предыдущей теоремы все множества вида $E^x \in H$.*

*Тогда существует $B$-множество $G \supset E$ и такое, что все множества вида $G^x$ суть замыкания множеств класса $H$.*

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях этой теоремы $A^{H}\{U_{n_1 \cdots n_k}\} = \phi$, и, следовательно, согласно первой теореме о кратной отделимости существуют $B$-множества $S_{n_1 \cdots n_k} \supset U_{n_1 \cdots n_k}$ и такие, что $A^{H}\{S_{n_1 \cdots n_k}\} = \phi$. В таком случае $B$-множество $G \supset E$ и все множества вида $G^x$ суть замыкания множеств класса $H$.

Обе теоремы, о которых здесь идет речь, приложимы в частности к следующим свойствам $H$.

1. Содержать не более чем $n$ точек ($n$ — натуральное).

2. Быть вполне упорядоченным (в этом случае множества $G^x$ — замкнутые вполне упорядоченные множества).

3. Быть вполне упорядоченным типа $< \alpha$; в таком случае множества $G^x$ суть замкнутые вполне упорядоченные множества типа $< \alpha$, если $\alpha$ — число I рода, и типа $\leqslant \alpha$, если $\alpha$ — число II рода.

4. Быть счетным приводимым множеством. В таком случае множества $G^x$ суть замкнутые счетные приводимые множества.

5. Быть приводимым множеством ранга $< \alpha$; в таком случае множества $G^x$ суть счетные замкнутые приводимые множества ранга $< \alpha$, если $\alpha$ — число I рода, и ранга $\leqslant \alpha$, если $\alpha$ — число II рода.

6. Иметь компактное замыкание, в этом случае множество $G^x$ является компактным.

Заметим, что для случаев, когда класс $H$ представляет собой класс счетных множеств, множеств типа $F_\sigma$, а также множеств абсолютно I класса, доказанные теоремы не дают ничего.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
3 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Л у з и н, Лекции об аналитических множествах, М., 1953. [2] В. И. Г л и в е н к о, Матем. сборн., 36, 138 (1929). [3] П. С. Н о в и к о в, Fund. Math., 8 (1931). [4] П. С. Н о в и к о в, ДАН, 23, 836 (1939). [5] З. И. К о з л о в а, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 421 (1950). [6] А. А. Л я п у н о в, ДАН, 2, 276 (1934). [7] А. А. Л я п у н о в, ДАН, 53, 399 (1946).