Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 4

УДК 51.01:518.5:519.5 МАТЕМАТИКА

В. И. АМСТИСЛАВСКИЙ

О РАЗЛОЖЕНИИ ТЕЛА МНОЖЕСТВ, ПОЛУЧАЕМЫХ R-ОПЕРАЦИЕЙ НАД РЕКУРСИВНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 18 VIII 1969)

Согласно известной аналогии (Кузнецова — Аддисона), существующей между иерархиями дескриптивной теории множеств и иерархиями теории рекурсивных функций, теореме Суслина о разложении максимального тела множеств *, получаемых A-операцией над открытыми множествами, в сумму классов борелевской иерархии ([13]) соответствует теорема Клини о разложении максимального тела множеств, получаемых A-операцией над общерекурсивными множествами, посредством гиперарифметической иерархии ([4], [5]). Обобщая понятие A-операции, А. Н. Колмогоров ввел класс R-операций, а А. А. Ляпунов, рассматривая вопрос о соответствующем обобщении теоремы Суслина, установил ([7–9]), что для достаточно мощных R-операций максимальное тело T множеств, получаемых R-операцией над открытыми множествами, строго шире, чем сумма классов трансфинитной иерархии, начинающейся с тех же открытых множеств и получаемой конечным или счетным повторением операций более слабых, чем данная R-операция. Таким образом, задача разложения тела T не может быть решена с помощью иерархий длины Ω (Ω — наименьшее несчетное порядковое число) и все еще остается нерешенной.

Аналогом этой задачи в теории рекурсивных функций является задача разложения максимального тела $T_{\text{рек}}$ множеств, получаемых некоторой R-операцией над общерекурсивными множествами, решению которой посвящена данная заметка. Для каждой достаточно мощной R-операции и соответствующего ей тела $T_{\text{рек}}$ мы определяем иерархию, сумма классов которой равна $T_{\text{рек}}$. Длина этой иерархии зависит от $T_{\text{рек}}$ и может значительно превышать ω_1 (наименьшее неконструктивное порядковое число). Иерархия, получающаяся в случае, когда данная R-операция является A-операцией, тесно связана с гиперарифметической иерархией Клини, и упомянутая выше теорема Клини получается в этом частном случае из нашей теоремы о разложении **.

1. Индексы. Используются термины и обозначения из ([1]), п. 1. E — произвольное непустое множество, называемое *пространством*; $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, PN — множество всех подмножеств N; Φ_M — δ-операция с базой M $(\subseteq PN)$. Говорят, что δs-операция Φ_{M_1} (*рекурсивно*) *мощнее*, чем δs-операция Φ_{M_2} $(M_1, M_2 \subseteq PN)$, если существует такая (общерекурсивная) функция $f(i)$, что $\underset{i}{\Phi_{M_2}}\{E_i\} = \underset{i}{\Phi_{M_1}}\{E_{f(i)}\}$ для любой последовательности $\{E_i\}_{i \in N}$ подмножеств E. $\Phi_{M'}$ есть δs-операция, дополнительная к Φ_M; $\Phi_{R(M)}$ — R-операция над Φ_M ([1]). Множество $X = \underset{i}{\Phi_{R(M)}}\{E_i\}$, где $E_i \subseteq E$, может быть получено также в результате сле-

* Следуя Хаусдорфу ([13]), мы называем *телом множеств* такой класс множеств, что сумма, разность и пересечение двух любых множеств этого класса принадлежит этому же классу.

** Вопрос об обобщении теоремы Клини посредством R-операций недавно исследовал также P. G. Hinman ([2]), однако построенные им иерархии охватывают лишь собственную часть соответствующих тел $T_{\text{рек}}$.

дующего трансфинитного процесса ([9]). Пусть для любого $\xi \subseteq N$ $F(\xi) = \{i\colon\ i \in \xi \& \theta_i^{-1}(\xi) \in \widetilde{M}\}$ (о $\theta_i(m)$ и $\widetilde{M}$ см. ([1])), и для всех $\alpha < \Omega$ индуктивно определены множества $\xi^{(\alpha)}$ $(\subseteq N)$:

$$\xi^{(0)} = \xi, \quad \xi^{(\alpha)} = F\Big(\bigcap_{\beta<\alpha} \xi^{(\beta)}\Big) \text{ при } \alpha > 0. \tag{1}$$

Очевидно, $\xi^{(\alpha+1)} \subseteq \xi^{(\alpha)}$; наименьшее α такое, что $\xi^{(\alpha+1)} = \xi^{(\alpha)}$, называется индексом стабилизации ξ и обозначается $\operatorname{Ind} \operatorname{st}_M \xi$. Если $\alpha = \operatorname{Ind} \operatorname{st}_M \xi$, то $\xi^{(\alpha)}$ обозначается $\operatorname{St}_M \xi$. Пусть для всех $x \in E$ $\xi_x = \{i\colon\ x \in E_i\}$. Тогда

$$X = \Phi_{\mathrm{R}(M)}_{i}\{E_i\} = \{x\colon\ 0 \in \operatorname{St}_M \xi_x\}.$$

Если $x \in E \setminus X$, то наименьшее α, при котором $0 \notin \xi_x^{(\alpha)}$, обозначается $\operatorname{Ind}_M(x / \{E_i\})$; если $x \in X$, то полагают $\operatorname{Ind}_M(x / \{E_i\}) = \Omega$. $\operatorname{Ind}_M(x / \{E_i\})$ называется внешним индексом последовательности $\{E_i\}$ в точке x.

2. Классы $\mathfrak{R}_M$. Далее пространство $E = N^{k+1}$ при различных $k \in N$. Если для для всех $i \in N$ $E_i \subseteq N^{k+1}$ и $\{\langle m_0, \ldots, m_k, i\rangle\colon \langle m_0, \ldots, m_k\rangle \in E_i\}$ — обще- (или примитивно-) рекурсивное множество, то последовательность $\{E_i\}$ называется обще- (или примитивно-) рекурсивной. Класс всех множеств X $(\subseteq N^{k+1}, k = 0, 1, 2, \ldots)$ таких, что

$$X = \Phi_{\mathrm{R}(M)}_{i}\{E_i\},$$

где $\{E_i\}$ — какая-либо общерекурсивная последовательность ($E_i \subseteq N^{k+1}$ при некотором $k \in N$) назовем классом $\mathfrak{R}_M$. Класс дополнений (до соответствующего N^{k+1}) всех множеств класса $\mathfrak{R}_M$ обозначим $C\mathfrak{R}_M$; $\mathfrak{R}_M \cap C\mathfrak{R}_M$ обозначим $B\mathfrak{R}_M$. (Классы $\mathfrak{R}_{n+1}$ из ([1]) совпадают с $\mathfrak{R}_M \cap PN$ при $M = R_n'$.) $B\,\mathfrak{R}_M$ есть тело множеств, включающее любое тело, состоящее из $\mathfrak{R}_M$-множеств.

Отметим, что:

А1. Класс всех множеств $X = \Phi_{\mathrm{R}(M)}_{i}\{E_i\}$, где $\{E_i\}$ — примитивно-рекурсивная последовательность, совпадает с $\mathfrak{R}_M$.

А2. Существует $\mathfrak{R}_M$-множество $U \subseteq N^{k+2}$, универсальное для всех $\mathfrak{R}_M$-подмножеств N^{k+1}. Следовательно, $\mathfrak{R}_M \neq C\mathfrak{R}_M$, и классы $\mathfrak{R}_M$ и $C\mathfrak{R}_M$ строго шире, чем $B\mathfrak{R}_M$.

Положим $\omega_M = \sup\{\operatorname{Ind} \operatorname{st}_M \xi\colon\ \xi$ — общерекурсивное подмножество $N\}$. При любом $M \subseteq PN$: а) класс индексов стабилизации всех общерекурсивных $\xi \subseteq N$ совпадает с $\{\alpha\colon\ \alpha \leqq \omega_M\}$; б) класс всех $\neq \Omega$ внешних индексов всевозможных общерекурсивных последовательностей совпадает с $\{\alpha\colon\ \alpha < \omega_M\}$. Доказательство принципа сравнения индексов для R_α-множеств в ([8]) (упрощенное с помощью ([9])) проходит и для $\mathfrak{R}_M$-множеств, в результате чего получается

Лемма (о сравнении индексов). *Пусть $\{E_i^0\}$ и $\{E_i^1\}$ — две общерекурсивные последовательности подмножеств N^{k+1}, и для $x \in N^{k+1}$ и $r = 0,1$ $\alpha_r(x) = \operatorname{Ind}_M(x / \{E_i^r\})$. Тогда, если $\Phi_{\mathrm{R}(M)}$ рекурсивно мощнее, чем $\Phi_{M'}$, и чем операция суммы двух множеств, то $\{x\colon\ \alpha_0(x) \leqslant \alpha_1(x)\} \in \mathfrak{R}_M$.*

Следствие. *При обозначениях и условиях леммы и при любом $\beta < \omega_M$ множества $\{x\colon\ \alpha_0(x) < \beta\}$, $\{x\colon\ \alpha_0(x) \leqq \beta\}$ и $\{x\colon\ \alpha_0(x) = \beta\}$ принадлежат $B\mathfrak{R}_M$.*

3. Ограниченность индексов. Пусть $\mathfrak{A}$ есть класс всех таких $M \subseteq PN$, что:

Б1. Φ_M рекурсивно мощнее, чем операция $\bigcup$ (т. е. $\bigcup_i E_i$).

Б2. $\Phi_{\mathrm{R}(M)}$ рекурсивно мощнее, чем $\Phi_{M'}$.

Условимся, что всюду далее A обозначает переменную на $\mathfrak{A}$, и при употреблении составных обозначений, в которые входит A (например, $\mathfrak{R}_A$, $\Phi_{\mathrm{R}(A)}$, ω_A) всегда подразумевается, что $A \in \mathfrak{A}$.

Теорема 1 (об ограниченности индексов). *Пусть* $X, Y \subseteq N^{k+1}$, $X \cap Y = \phi$ *и* $X, Y \in \mathfrak{R}_A$. *Пусть* $\{E_i\}$ *— такая общерекурсивная последовательность подмножеств* N^{k+1}, *что* $\Phi_{\mathrm{R}(A)}\underset{i}{}\{E_i\} = Y$. *Тогда существует такое порядковое число* $\alpha < \omega_A$, *что для всех* $x \in X$ $\mathrm{Ind}_A(x / \{E_i\}) < \alpha$.

Доказательство проводится методом, близким к тому, которым в [6] доказана теорема Лузина об ограниченности индексов решет на аналитических множествах; используются А2, Б1 и лемма о сравнении индексов.

Говорят, что (общерекурсивная) последовательность $\{E_i\}$ есть последовательность с ограниченными внешними индексами, если существует такое $\alpha < \Omega$ ($\alpha < \omega_M$ соответственно), что $\mathrm{Ind}_M(x / \{E_i\}) < \alpha$ для всех $x \notin \Phi_{\mathrm{R}(M)}\{E_i\}$.

Теорема 2. *Класс всех множеств* $X = \Phi_{\mathrm{R}(A)}\underset{i}{}\{E_i\}$, *где* $\{E_i\}$ *— какая-либо общерекурсивная последовательность с ограниченными внешними индексами, совпадает с* $B\mathfrak{R}_A$.

Доказательство по теореме 1 и следствию леммы о сравнении индексов.

Замечание. Для классических R_α-множеств при $\alpha > 1$ утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, ложны [8].

Если $X \subseteq N^{k+1}$, $Y \subseteq N$ и $X = f^{-1}(Y)$, где f — общерекурсивная функция, все значения которой различны, то пишут $X \leqq Y$.

Теорема 3. *Для любого* $X \in \mathfrak{R}_A$ *существует общерекурсивное* $\xi \subseteq N$ *такое, что* $X \leqq {}_1\mathrm{St}_A\,\xi$. *Для любого общерекурсивного* $\xi \subseteq N$ $\mathrm{St}_A\,\xi \in \mathfrak{R}_A$ *и* $(\mathrm{Ind\,st}_A\,\xi < \omega_A) \Longleftrightarrow (\mathrm{St}_A\,\xi \in B\mathfrak{R}_A)$.

Доказательство с помощью теоремы 2.

Теперь мы получим новую характеристику ω_A, не связанную с индексами. Функция $\nu(n)$, отображающая некоторое $X \subseteq N$ на множество всех порядковых чисел $\beta < \alpha$ $(\alpha < \Omega)$, называется нумерацией сегмента $\{\beta\colon \beta < \alpha\}$. Если существует такая нумерация $\nu(n)$ сегмента $\{\beta\colon \beta < \alpha\}$, что $\{\langle m, n\rangle\colon \nu(m) < \nu(n)\} \in B\mathfrak{R}_M$, то α назовем $B\mathfrak{R}_M$-порядковым числом. Если α есть $B\mathfrak{R}_M$-порядковое число, то, очевидно, каждое $\beta < \alpha$ — также $B\mathfrak{R}_M$-порядковое число.

Теорема 4. ω_A *есть наименьшее порядковое число, не являющееся* $B\mathfrak{R}_A$*-порядковым числом.*

Следствие. *Если* $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{R}_{A_1} = \mathfrak{R}_{A_2}$ *влечет* $\omega_{A_1} = \omega_{A_2}$. *В частности,* $\omega_{\mathrm{R}(A)} = \omega_A$.

4. Иерархии. Пусть $\varphi(m, n)$ — общерекурсивная функция, универсальная для всех 1-местных примитивно-рекурсивных функций [10] и $\pi = \{[m_0, \ldots, m_k]\colon \varphi(m_0, [m_1, \ldots, m_k]) = 0\}$ ($[m_0, \ldots, m_k]$ есть номер кортежа $\langle m_0, \ldots, m_k\rangle$ [1]). Из А1 и теоремы 3 следует, что $\mathrm{Ind\,st}_A\,\pi = \omega_A$. Определим нумерацию $|m|_A$ сегмента $\{\alpha\colon \alpha < \omega_A\}$ так: $\{m : |m|_A = \alpha\} = (\bigcap\limits_{\beta<\alpha}\pi^{(\beta)}) \setminus \pi^{(\alpha)}$, где $\pi^{(\alpha)}$ определены по (1) при $\xi = \pi$ и $M = A$. Пусть для любого $\xi \subseteq N$ $j_A(\xi) = \Phi_A\{E_i^\xi\}$, где $E_i^\xi = \{m\colon (\exists k)T_1^\xi(m, i, k)\}$ и T_1^ξ — известный предикат из [3]. Теперь индукцией по $\alpha < \omega_A$ определим множества $H_A(\alpha)$ $(\subseteq N)$:

$$H_A(0) = j_A(\phi),$$

$$H_A(\alpha) = \{[m, n]\colon |m|_A < \alpha \,\&\, n \in H_A(|m|_A)\} \text{ при } \alpha > 0.$$

Класс всех множеств $X (\subseteq N^{k+1}, k \geqslant 0)$, общерекурсивных относительно $H_A(\alpha)$, обозначим $K_A(\alpha)$. Ниже $\xi < {}_1\eta$ означает, что $\xi \leqq {}_1\eta$, но η не $\leqq {}_1\xi$.

Теорема 5. *Если* $\alpha < \beta < \omega_A$, *то* $H_A(\alpha) < {}_1H_A(\beta)$, *и класс* $K_A(\beta)$ *строго шире, чем* $K_A(\alpha)$.

Теорема 6 (о разложении). $B\mathfrak{R}_A = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_A} K_A(\alpha)$.

Включение правой части в левую доказывается эффективной трансфинитной индукцией [11], обратное включение — с помощью теоремы 2.

5. Связь с гиперарифметической иерархией. Если Φ_A есть операция $\bigcup$ (т. е. $\tilde{A} = PN \setminus \{\phi\}$), то для любого $X \subseteq N^{k+1}$ $X \in \mathfrak{K}_A \Leftrightarrow X \in \Sigma_1{}^1$, и $\omega_A = \omega_1$ ([12]).

Пусть O — класс всех ординальных обозначений Клини ([5]), $|a|$ — порядковое число, чьим обозначением является $a \in O$, и $a^* = 2^a$. Пусть $H_a = \{x\colon H_a(x)\}$, где $a \in O$ и $H_a(x)$ — предикаты, определенные в ([4]).

Теорема 7. *Если Φ_A есть операция $\bigcup$, то для любого $a \in O$ $H_{a^*} \leqq {}_1H_A(|a|) \leqq {}_1H_{a^{**}}$.*

Теперь с помощью теоремы 7 из теоремы 6 получаем

Следствие (Клини ([4, 5])). *Множество X ($\subseteq N^{k+1}$) принадлежит $\Sigma_1{}^1 \cap \Pi_1{}^1$ тогда и только тогда, когда X общерекурсивно относительно H_a для некоторого $a \in O$.*

Автор благодарит А. А. Ляпунова за беседы, стимулировавшие эту работу и приведшие, в частности, к определению H_A-иерархий.

Институт кибернетики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
23 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Амстиславский, ДАН, **180**, № 5, 1023 (1968). [2] P. G. Hinman, Notices Am. Math. Soc., **15**, № 2, 377 (1968). [3] С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957. [4] S. C. Kleene, Bull. Am. Math. Soc., **65**, 193 (1955). [5] S. C. Kleene, Am. J. Math., **77**, 405 (1955). [6] К. Куратовский, Топология, **1**, М., 1966. [7] А. А. Ляпунов, ДАН, **58**, № 9, 1887 (1947). [8] А. А. Ляпунов, Матем. сборн., **32**, № 2, 255 (1953). [9] А. А. Ляпунов, Алгебра и логика, семинар, 2, 1, 47 (1963). [10] Р. Петер, Рекурсивные функции, М., 1954. [11] H. Rogers jr., Proc. Am. Math. Soc., **10**, 847 (1959). [12] C. Spector, In: Infinitistic Methods, Warsaw, 1961, p. 97. [13] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937.