Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 4

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

В. И. АРНАУТОВ

НЕДИСКРЕТНАЯ ТОПОЛОГИЗУЕМОСТЬ СЧЕТНЫХ КОЛЕЦ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 IX 1969)

Под топологическим кольцом будем понимать не обязательно ассоциативное кольцо, в котором определена отделимая топология, причем операции кольца являются непрерывными. Очевидно, что в любом кольце можно тривиальным образом ввести (дискретную) топологию, чтобы превратить его в топологическое кольцо. В конечных кольцах это единственно возможная топология. Вопрос о возможности в любом бесконечном кольце ввести недискретную топологию пока не решен. В настоящей работе доказывается, что в любом счетном кольце можно определить недискретную топологию.

Пусть R — некоторое кольцо и x — некоторая переменная. Одночленом от x над R будем называть произвольное формальное произведение элементов из R и x с любой расстановкой скобок. Степенью одночлена называется число вхождений x в данный одночлен. Многочленом от x над R будем называть произвольную конечную сумму одночленов. Степенью многочлена называется максимальная степень одночленов, входящих в качестве слагаемых в многочлен. Элемент $a \in R$ называется корнем многочлена $P(x)$, если $P(a) = 0$.

Аналогично доказательству теоремы 3 из ([1]) доказывается

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы счетное кольцо R допускало недискретную топологизацию, в которой идеал I был бы открытым идеалом, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного числа многочленов $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ над R с ненулевыми свободными членами существовал ненулевой элемент из I, не являющийся корнем ни одного из этих многочленов.*

Пусть M — произвольное множество и s — некоторое натуральное число. Через $M^{(s)}$ обозначим множество всех подмножеств множества M, содержащих точно s элементов.

Л е м м а 1. *Пусть M_0 — некоторое счетное множество. Для любых натуральных чисел s и r и любого разбиения множества $M_0^{(s)}$ на r классов $N_1, N_2, \ldots, N_r$ существует такое счетное подмножество $M \subseteq M_0$ и такое число $l \leqslant r$, что $M^{(s)} \subseteq N_l$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем индукцией по числу s. Если $s = 1$, то утверждение леммы очевидно. Допустим, что лемма верна для числа s, и докажем ее для $s + 1$.

Пусть $M_0^{(s+1)} \bigcup\limits_{i=1}^{r} N_i$ и a_0 — некоторый элемент из M_0. Если возьмем $N_i' = \{A \in (M_0 \setminus \{a_0\})^{(s)} \mid \{a_0\} \cup A \in N_i\}$, то получим разбиение множества $(M_0 \setminus \{a_0\})^{(s)}$ на r классов $N_1', N_2', \ldots, N_r'$. По допущению существует такое бесконечное подмножество $M_1 \subseteq M_0 \setminus \{a_0\}$ и такое натуральное число $l_0 \leqslant r$, что $M_1^{(s)} \subseteq N_{l_0}'$. Тогда $\{a_0\} \cup A \in N_{l_0}$ для любого $A \in N_1^{(s)}$ и $M_1^{(s+1)} = \bigcup\limits_{i=1}^{r} (N_i \cap M_1^{(s+1)})$.

Поступаем теперь с множеством M_1 так же, как поступили выше с множеством M_0. Получим элемент $a_1 \in M_1$, натуральное число $l_1 \leqslant r$ и такое бесконечное подмножество $M_2 \subseteq M_1 \setminus \{a_1\}$, что $\{a_1\} \cup A \in N_{l_1}$ для любого $A \in M_2^{(s)}$.

Продолжая этот процесс бесконечно, получим такие последовательности элементов $a_0, a_1, a_2, \ldots$ из M_0 и натуральных чисел $l_0, l_1, l_2, \ldots$, не бо́льших, чем r, и такую убывающую последовательность подмножеств $M_0 \supset \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$, что $a_j \in M_j$ и $\{a_j\} \cup A_j \in N_{l_j}$ для любого $A_j \in M_{j+1}^{(s)}$.

Если возьмем $B_k = \{a_i | l_i = k\}$, то существует такое число $l \leqslant r$, что B_l — бесконечное множество.

Возьмем $M = B_l$ и покажем, что M — искомое множество.

Пусть $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{s+1}}\} \in M^{(s+1)}$. Не нарушая общности, можем считать, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_{s+1}$. Так как $a_{i_k} \in M_{i_k} \subseteq M_{i_1+1}$ для $k \geqslant 2$, то $\{a_{i_2}, \ldots, a_{i_{s+1}}\} \in M_{i_1+1}^{(s)}$. Тогда $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{s+1}}\} \in \{\{a_{i_1}\} \cup A \mid A \in M_{i_1+1}^{(s)}\} \subseteq \subseteq N_l$.

Этим лемма полностью доказана.

Из леммы легко следует

Т е о р е м а 2. *Если M — счетное множество, то для любого разбиения множества всех конечных подмножеств множества M на конечное число классов $N_1, N_2, \ldots, N_r$ и любого натурального числа s существует такое бесконечное подмножество $M_s \subseteq M$ и такие числа $l_1, l_2, \ldots, l_s$, что $M_s^{(k)} \subseteq \subseteq N_{l_k}$ для любого $k \leqslant s$.*

Т е о р е м а 3 (Ван-Дер-Варден). *Для любых чисел m и r существует такое число $n(m, r)$, что при любом разбиении отрезка натуральных чисел длины $n(m, r)$ на r подмножеств хотя бы в одном из них содержится арифметическая прогрессия длины m (см., например, (2)).*

Л е м м а 2. *Для любых натуральных чисел m, r существует такое число $s(m, r)$, что при любом разбиении отрезка натурального ряда от 1 до $s(m, r)$ на r подмножеств хотя бы в одном из них имеются такие числа $l_1, l_2, \ldots, l_m$, что любая сумма вида $\sum_{j-1}^{q} l_{i_j}$, где $i_j \neq i_k$, тоже принадлежит этому же подмножеству.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим по индукции натуральные числа s_i, взяв $s_0 = 1$ и $s_{i+1} = n(s_i + 1, r)$. Покажем, что число $s = s_{m \cdot r}$ является искомым.

Пусть отрезок натурального ряда от 1 до s разбит на r подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Для любого числа $0 \leqslant j \leqslant m \cdot r$ определим разбиение отрезка натурального ряда от 1 до $s_{m \cdot r - j}$ на r подмножеств $A_{1, j}, A_{2, j}, \ldots, A_{r, j}$ следующим образом:

Возьмем $A_{i, 0} = A_i$ для $i = 1, 2, \ldots, r$. Допустим, что уже определено разбиение отрезка натурального ряда от 1 до $s_{m \cdot r - j}$ для $j < m \cdot r$ на r подмножеств $A_{1, j}, A_{2, j}, \ldots, A_{r, j}$. Тогда хотя бы в одном из этих подмножеств содержится арифметическая прогрессия длины $1 + s_{m \cdot r - j - 1}$, т. е. $\{n_{j+1} + ip_{j+1} | \, i = 0, 1, \ldots, s_{m \cdot r - j - 1}\}$ содержится в некотором из подмножеств $A_{t, j}$. Возьмем $A_{k, j+1} = \{i | ip_{j+1} \in A_{k, j}\}$ для $k = 1, 2, \ldots, r$. Так как $ip_{j+1} \leqslant n_{j+1} + ip_{j+1} \leqslant s_{m \cdot r - j}$ для $i \leqslant s_{m \cdot r - j - i}$, то $\bigcup_{k=1}^{r} A_{k, j} \supseteq \{ip_{j+1} | 1 \leqslant i \leqslant \leqslant s_{m \cdot r - j - 1}\}$. Тогда $\bigcup_{k=1}^{r} A_{k, j+1} = \{1, 2, \ldots, s_{m \cdot r - j - 1}\}$, т. е. получили разбиение отрезка натурального ряда от 1 до $s_{m \cdot r - j - 1}$ на r подмножеств $A_{1, j+1}, A_{2, j+1}, \ldots, A_{r, j+1}$.

Таким образом, для любого числа $0 \leqslant j < m \cdot r$ определено разбиение отрезка натурального ряда от 1 до $s_{m \cdot r - j}$ на r подмножеств $A_{1, j}, A_{2, j}, \ldots, A_{r, j}$, причем хотя бы в одном из этих подмножеств содержится арифметическая прогрессия $n_{j+1} + ip_{j+1}$, $i = 0, 1, \ldots, 1 + s_{m \cdot r - j - 1}$.

Так как j принимает $m \cdot r$ значений, то существует такое число t_0 и такие числа $0 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m < m \cdot r$, что в каждом из множеств A_{t_0, j_k}

$k=1, 2, \ldots, m$, содержится соответствующая арифметическая прогрессия $n_{j_k+1}+ip_{j_k+1}$, $i=0, 1, \ldots, s_{m\cdot r-j_k-1}$.

Для любого $1 \leqslant k \leqslant m$ возьмем $l_k=(p_1p_2\ldots p_{j_k})\,n_{j_k+1}$ и покажем, что числа $l_1, l_2, \ldots, l_m$ являются искомыми.

Прежде чем закончить доказательство леммы, докажем некоторые свойства множеств $A_{t,\,j}$.

(1) Если $i \in A_{t,\,j}$, то $(p_1p_2\ldots p_j)\,i \in A_{t,\,0}$ для любого $j \leqslant m\cdot r$.

В самом деле, из определения множеств $A_{t,\,j}$ следует, что $p_j i \in A_{t,\,j-1}$. Тогда $p_{j-1}p_j i \in A_{t,\,j-2}$ и т. д. Применяя этот процесс j раз, получим $(p_1p_2\ldots p_j)\,i \in A_{t,\,0}$.

(2) $\sum\limits_{j=1}^{i+q} n_{j+1}(p_{i+1}p_{i+2}\ldots p_j) \leqslant s_{m\cdot r-1}$ для любого i.

В самом деле, если $q=0$, то $n_{i+1} \leqslant s_{m\cdot r-i}$. Допустим, что $\sum\limits_{j=i}^{i+q} n_{j+1}(p_{i+1}p_{i+2}\ldots p_j) \leqslant s_{m\cdot r-i}$ для любого i. Тогда

$$\sum_{j=1}^{i+q+1} n_{j+1}(p_{i+1}p_{i+2}\ldots p_j) = n_{i+1}+p_{i+1}\Big[\sum_{j=i+1}^{i+1+q} n_{j+1}(p_{i+2}p_{i+3}\ldots p_j)\Big] \leqslant$$
$$\leqslant n_{i+1}+p_{i+1}s_{m\cdot r-i-1} \leqslant s_{m\cdot r-i}.$$

Перейдем теперь к завершению доказательства леммы.

Так как, по свойству (2),

$$\sum_{i=2}^{q}(p_{j_{k_1}+2}p_{j_{k_1}+3}\ldots p_{j_{k_i}})\,n_{j_{k_i}+1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=j_{k_1}+1}^{j_{k_q}} n_{i+1}(p_{j_{k_1}+2}p_{j_{k_1}+3}\ldots p_i) \leqslant s_{m\cdot r-j_{k_1}-1},$$

то

$$n_{j_{k_1}+1}+p_{j_{k_1}+1}\Big[\sum_{i=2}^{q}(p_{j_{k_1}+2}p_{j_{k_1}+3}\ldots p_{j_{k_i}})\,n_{j_{k_i}+1}\Big] \in A_{t_0,\,j_{k_1}}.$$

Тогда по свойству (1) имеем

$$\sum_{i=1}^{q} l_{k_i} = (p_1p_2\ldots p_{j_{k_1}})\Big[n_{j_{k_1}+1}+\sum_{i=2}^{q}(p_{j_{k_1}+1}\ldots p_{j_{k_i}})\,n_{j_{k_i}+1}\Big] \in A_{t_0,\,0}.$$

Этим лемма полностью доказана.

Л е м м а 3. *Если $P(x)$ — некоторый многочлен степени m без свободного члена над кольцом R, то для любого элемента $a \in R$ $P(x+a) = P(x)+P(a)+Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен степени не больше чем $m-1$ без свободного члена.*

Доказательство очевидно.

Л е м м а 4. *Если для многочлена $P(x)$ степени m над кольцом R существуют такие элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$, что любая сумма вида $\sum\limits_{i=1}^{q} a_{k_i}$, где $k_i \neq k_j$, является корнем $P(x)$, то свободный член многочлена $P(x)$ равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство легко проводится индукцией по степени многочлена $P(x)$.

Т е о р е м а 4. *Для любого конечного числа многочленов над кольцом R с ненулевыми свободными членами в любой бесконечной подгруппе I адди-*

тивной группы кольца R существует такой ненулевой элемент a, который не является корнем ни одного из этих многочленов.

Доказательство. Допустим противное, т. е. что существует такое конечное число многочленов $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_r(x)$ над R с ненулевыми свободными членами, что любой ненулевой элемент из I является корнем некоторого из этих многочленов. Выберем такое счетное множество M элементов из I, что любая конечная сумма попарно различных элементов $a_i \in M$ отлична от нуля.

Определим теперь разбиение множества всех конечных подмножеств множества M на r классов $N_1, N_2, \ldots, N_r$ следующим образом: подмножество $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ множества M отнесем к классу N_j, где

$$j = \min\left\{k \mid P_k\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) = 0\right\}.$$

Если m — наибольшая степень многочлена $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_r(x)$ и $s = s(m+1, r)$, то по теореме 2 существует такое бесконечное подмножество M_s, что $M_s^{(k)} \subseteq N_{l_k}$ для любого $k \leqslant s$.

Определим теперь разбиение отрезка натурального ряда от 1 до s на r подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$ следующим образом: число $i \leqslant s$ отнесем к подмножеству A_j тогда и только тогда, когда $M_s^{(i)} \subseteq N_j$.

По лемме 2 существуют такие натуральные числа $j_0 \leqslant r$ и $l_1 < l_2 < \ldots$ $\ldots < l_{m+1} < s$, что любая сумма $l_{i_1} + l_{i_2} + \ldots + l_{i_q}$, где $i_j \neq i_k$, принадлежит подмножеству A_{j_0}. Тогда $M_s^{\left(\sum\limits_{j=1}^{q} l_{i_j}\right)} \subseteq N_{j_0}$.

Если $M_s = \{b_1, b_2, \ldots\}$, то определим элементы $a_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_{l_1}$,

$$a_2 = b_{l_1+1} + b_{l_1+2} + \ldots + b_{l_1+l_2}, \ \ldots, \ a_{m+1} = b_{l_1+l_2+\ldots+l_m+1} + b_{l_1+l_2+\ldots+l_m+2} + \ldots$$
$$\ldots + b_{l_1+l_2+\ldots+l_m+l_{m+1}}.$$

Из определения классов N_j следует, что любая сумма $\sum\limits_{j=1}^{q} a_{i_j}$ является корнем многочлена $P_{j_0}(x)$. Так как степень многочлена $P_{j_0}(x)$ не больше чем m, то по лемме 4 свободный член у $P_{j_0}(x)$ равен нулю. Получили противоречие с условием теоремы. Следовательно, в I имеется ненулевой элемент, который не является корнем ни одного из многочленов $P_j(x)$.

Из теорем 1 и 4 следует

Теорема 5. *Для любого бесконечного идеала I счетного кольца R существует недискретная топологизация кольца R, в которой I является открытым идеалом.*

Следствие. *Любое счетное кольцо допускает недискретную топологизацию.*

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
22 VIII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Арнаутов, Сибирск. матем. журн., 9, № 6 (1968). [2] А. Я. Хинчин, Три жемчужины теории чисел, М., 1948.