Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 2

МАТЕМАТИКА

ГЕЗА ФРОЙД (GEZA FREUD)

ОБ АППРОКСИМАЦИИ С ВЕСОМ МНОГОЧЛЕНАМИ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 8 XII 1969)

Рассматривается аппроксимация многочленами с весом $\rho(x) = e^{-x^2/2}$.

Обозначим через $\|f\|_p$ норму в пространстве $\mathscr{L}_p = \mathscr{L}_p(-\infty, +\infty)$, и пусть $\mathscr{L}_p^*$ — множество таких функций $f(t)$, что $f\rho \in \mathscr{L}_p$ и $\|f\|_p^* = \|\rho f\|_p$. Пусть n — произвольное целое число $\geqslant 4$, $\nu = [n/2]$, $\pi_n =$ множество алгебраических многочленов порядка не выше n и $c_1, c_2, \ldots$ — абсолютные постоянные.

Рассматривается поведение величин

$$\varepsilon_n^{(p)*}(f) = \inf_{\varphi_n \in \pi_n} \|f - \varphi_n\|_p^*. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если* $F(t) = \int f(\tau)\,d\tau$, *и* $f \in \mathscr{L}_p^*$, *то*

$$\varepsilon_n^{(p)*}(F) \leqslant c_1 n^{-1/2} \varepsilon_{n-1}^{(p)*}(f). \tag{2}$$

Следствие. *Справедливо соотношение*

$$\varepsilon_n^{(p)*}(F) \leqslant c_2 n^{-1/2} \|f\|_p^*. \tag{3}$$

Уже следствие (3) уточняет некоторые известные результаты. При $n = +\infty$ и дополнительном условии $\|F\|_\infty + \|f\|_\infty < \infty$ (3) следует из одной теоремы М. М. Джрбашяна ([2]), а при несколько более слабом условии $\|f\|_\infty < \infty$ — из одного результата автора ([5]). А. С. Джафаров ([1]) рассматривает случай $p < +\infty$. Отметим, что в работах ([1], [2], [5]) рассматриваются более общие весовые функции.

Мы докажем теорему 1 в конце статьи, предварительно установив следствие (3).

Теорема 2. *Пусть $F(t)$ имеет ограниченное изменение на каждом конечном интервале; тогда (правая часть предполагается конечной)*

$$\varepsilon_n^{(1)*}(F) \leqslant c_3 n^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\,|dF(t)|. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы двойственности С. М. Никольского ([3]) имеем

$$\varepsilon_n^{(1)*}(F) = \sup_{g \in B_n} \int F(t)\,g(t)\,\rho(t)\,dt = \sup_{\rho^{-1}G \in B_n} \int G(t)\,dF(t), \tag{5}$$

где B_n — множество таких функций, что $g(t) \in \mathscr{L}_\infty$, $\|g\|_\infty \leqslant 1$, а $\int g\varphi_n\rho\,dt = 0$ для любой $\varphi_n \in \pi_n$ и

$$G(x) = \int_x^\infty g(t)\,\rho(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(t)\,g(t)\,\rho(t)\,dt = \int (\Gamma_x - \varphi_n)\,g\rho\,dt \quad (\varphi_n \in \pi_n), \tag{6}$$

причем $\Gamma_x(t) = 0$ для $t < x$ и $\Gamma\ (t) = 1$, если $t \geqslant x$.

Из работы ([6]) вытекает, что для любого x найдется $\varphi_{nx} \in \pi_n$ такая, что * $\|\Gamma_x - \varphi_{nx}\|_1^* \leqslant c_3 n^{-1/2}\rho(x)$.

Из соотношения (6) при $\varphi_n = \varphi_{nx}$ получаем, что $|G(x)| \leqslant c_3 n^{-1/2}\rho(x)$ для любой допустимой G. Итак, соотношение (4) следует из (5), что и требовалось доказать.

Пусть $F_n(f; t)$ — $(C, 1)$-средние порядка n разложения некоторой функ-

* В случае $|x| \leqslant \sqrt{n}/4$ используется лемма § 2 работы ([6]); если $x > \sqrt{n}/4$, то $\varphi_{nx}(t) \equiv 0$, а если $x < -\sqrt{n}/4$, то $\varphi_{nx}(t) \equiv 1$.

ции $f \subset \mathcal{L}_1^*$ по ортогональным многочленам Эрмита и

$$v_n(f;t) = (n-\nu+1)^{-1}[(n+1)f_n(f;t) - \nu F_\nu(f;t)] \tag{7}$$

средние Валле-Пуссена. Тогда $v_n(\varphi_\nu; t) \equiv \varphi_\nu(t)$ для каждого $\varphi_\nu \in \pi_\nu$. Из § 5 работы ([4]) следует, что $\| F_n(f;t)\|_\infty^* \leqslant c_4 \| f(t)\|_\infty^*$; таким образом, из (7) получаем

$$\| v_n(f;t)\|_\infty^* \leqslant c_5 \| f\|_\infty^* \tag{8}$$

и далее

$$\| v_n(f;t)\|_1^* = \sup_{\|g\|_\infty^* \leqslant 1} \int g(t)\, v_n(f;t)\, \rho^2(t)\, dt =$$

$$= \sup_{\|g\|_\infty^* \leqslant 1} \int f(t)\, v_n(g;t)\, \rho^2(t)\, dt \leqslant c_5 \| f\|_1^*. \tag{9}$$

Доказательство неравенства (3). Пусть сначала $p = \infty$. Положим $\psi_x(t) = e^{t^2}$ при $t \in [0, x]$ и $\psi_x(t) = 0$ при $t \notin [0, x]$. В силу теоремы 2 найдется такой многочлен $\varphi_{\nu x} \in \pi_{\nu-1}$, что $\| \psi_x - \varphi_{\nu x}\|_1^* \leqslant \leqslant c_6 n^{-1/2} \rho^{-1}(x)$.

Если $\varphi_\nu \in \pi_{\nu-1}$, то $\int (f - v_{n-1})\, \varphi_\nu \rho^2 dt = 0$, и

$$\left| \int_0^x [f(t) - v_{n-1}(f;t)]\, dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) - v_{n-1}(f;t)]\, [\psi_x(t) - \varphi_{\nu x}(t)]\, \rho^2(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \| f - v_{n-1}(f)\|_\infty^* \| \psi_x - \varphi_{\nu x}\|_1^* \leqslant (c_5+1) \| f\|_\infty^* \| \psi_x - \varphi_{\nu x}\|_1^* \leqslant c_6 n^{-1/2} \| f\|_\infty^* \rho^{-1}(x)$$

Итак,

$$\varepsilon_n^{(\infty)*}(F) \leqslant c_6 n^{-1/2} \| f\|_\infty^*,$$

а так как $v_n(\varphi_\nu; t) \equiv \varphi_\nu(t)$ для любого $\varphi_\nu \in \pi_\nu$, то из соотношения (8) получаем

$$\| F(t) - v_n(F;t)\|_\infty^* \leqslant (c_5+1)\, \varepsilon_\nu^{(\infty)*}(F) \leqslant c_7 n^{-1/2} \| f\|_\infty^*, \tag{10}$$

откуда и следует неравенство (3) при $p = +\infty$.

Из неравенства (9) и теоремы 2 получаем

$$\| F(t) - v_n(F;t)\|_1^* = \inf \| F(t) - \varphi_\nu(t) + v_n(F - \varphi_{\nu 1} t)\|_1^* \leqslant$$

$$\leqslant (1 + c_4) \inf \| F(t) - \varphi_\nu(t)\|_1^* \leqslant c_8 n^{-1/2} \| f\|_1^*. \tag{11}$$

В силу интерполяционной теоремы Рисса — Торина (см. ([7]) том II) из соотношений (10) и (11) получаем

$$\| F(t) - v_n(F;t)\|_p^* \leqslant c_2 n^{-1/2} \| f\|_p^*. \tag{12}$$

Неравенство (3) доказано.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi_{n-1} \in \pi_{n-1}$ и

$$\| f - \varphi_{n-1}\|_p^* < 2\varepsilon_n^{(p)}(f).$$

Если в неравенстве (3) заменить функцию f на $f - \varphi_{n-1}$, то для выбранного соответствующим образом многочлена имеем

$$\left\| F(t) - \int^t \varphi_{n-1}(\tau)\, d\tau - \psi_n(t) \right\|_p^* \leqslant c_2 n^{-1/2} \| f - \varphi_{n-1}\|_p^* \leqslant 2c_2 n^{-1/2} \varepsilon_{n-1}^{(p)*}(f),$$

что и заканчивает доказательство теоремы.

Математический институт
Академии наук Венгрии
Будапешт

Поступило
3 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Джафаров, Тр. Инст. физ. и матем. АН АзербССР, 8, 117 (1959). [2] М. М. Джрбашян, Матем. сборн., 36, 353 (1955). [3] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 207 (1946). [4] G. Freud, S. Knapovski, Studia Math., 25, 373 (1965). [5] G. Freud, Acta Math. Acad. Sci. Hung.. 20, 223 (1969). [6] G. Freud, J. Szabados, Acta Sci. Math. (Szeged), in press. [7] A. Zygmund, Trigonometric Series, 2 ed., Cambridge, 1959.