Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 2

УДК 517.934

МАТЕМАТИКА

М. К. ФАГЕ

О МЕТОДЕ ПРОГОНКИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 X 1968)

Дана система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{y}'(x) + P(x)\mathbf{y}(x) = \mathbf{f}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

с суммируемыми элементами $p_{ij}(x)$ матрицы $P(x)$ и $f_i(x)$ вектора $\mathbf{f}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Будем искать такой абсолютно непрерывный вектор $\mathbf{y}(x)$ (т. е. вектор с абсолютно непрерывными компонентами $y_i(x)$; всюду далее — подобное же перенесение понятий со скалярных функций на векторные и матричные), который удовлетворяет уравнению (1) (почти всюду) и условиям

$$\int_0^1 (\mathbf{a}_i(s), \mathbf{y}(s))\, d\sigma(s) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где скобка вида $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначает $\sum_{i=1}^n a_i b_i$, $\mathbf{a}_i(s)$ суть непрерывные векторы, c_i — произвольные числа, $\sigma(s)$ — действительная неубывающая ограниченная функция; все остальные величины предполагаются, вообще говоря, комплексными.

В частности, для $\sigma(s) = 0, 1, 2$ соответственно при $s = 0$, $0 < s < 1$, $s = 1$ получаем обычные краевые условия вида

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{y}(0)) + (\mathbf{b}_i, \mathbf{y}(1)) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

а при $\sigma(s)$ также ступенчатой, но с бо́льшим чем два числом точек разрыва,— многоточечную задачу, которую не будем выписывать.

Как известно из общей теории таких задач (см., например, справочник [1]), а также из исследований по алгоритмической разработке теоретических построений (см., например, [2–7]), их решение сводится к выполнению двух основных процедур, для каждой из которых разработаны (и продолжают совершенствоваться) вычислительные алгоритмы:

(α) решение задачи Коши для соответствующей однородной системы;

(β) решение системы линейных алгебраических уравнений, например, для отыскания начальных значений $\mathbf{y}(0)$ из неявных уравнений (3) при распадающихся краевых условиях.

Третьим элементом, не являющимся абсолютно обязательным, но привлекаемым как для теоретического исследования задач, так и для преодоления трудностей их практического решения, является

(γ) решение сопряженного уравнения (* обозначает транспонирование)

$$\mathbf{z}'(x) = P^*(x)\mathbf{z}(x). \tag{4}$$

В цитированных работах в основном и рассматриваются различные сочетания этих процедур с целью выбора наиболее оптимального с вычислительной точки зрения варианта. В этой заметке обосновывается возможность еще одного варианта, а именно, полного исключения процедуры (α) с заменой ее на (γ), располагаемую ранее (β), с введением нового обязательного элемента — и н т е г р и р о в а н и я (с у м м и р о в а н и я) п о п а р а м е т р у s с в е с о м $d\sigma(s)$, промежуточного между (γ) и (β). Такой состав процедур можно в основном усмотреть из следующих соображений: непосредственными носителями информации в условиях (2) являются коэффициенты $\mathbf{a}_i(s)$, поэтому решение задачи и следует начинать с переработки этой информации; но они занимают в билинейной форме $(\mathbf{a}_i(s), \mathbf{y}(s))$ положение, сопряженное алгебраически с $\mathbf{y}(s)$, и поэтому должны обрабатываться в дифференциальной задаче с помощью транспонированной матрицы, т. е. с помощью уравнений (4).

Итак:

I. Решая на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ систему (4) при начальном условии

$$\mathbf{z}(x)\,|_{x=s} = \mathbf{a}_i(s), \tag{5}$$

получаем вектор-функции $\mathbf{z}(x) \equiv \mathbf{z}_i(x, s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, непрерывные по совокупности x, s и абсолютно непрерывные по x.

II. Интегрируя $\mathbf{z}_i(x, s)$ по параметру s с весом $d\sigma(s)$, получаем абсолютно непрерывные функции

$$\mathbf{w}_i(x) = \int_0^1 \mathbf{z}_i(x, s)\, d\sigma(s), \tag{6}$$

также удовлетворяющие уравнениям (4).

III. Решение $\mathbf{y}(x)$ поставленной задачи (1), (2) определяется теперь из а л г е б р а и ч е с к о й системы уравнений

$$(\mathbf{w}_i(x), \mathbf{y}(x)) = c_i + \int_0^1 d\sigma(s) \int_s^x (\mathbf{z}_i(u, s), \mathbf{f}(u))\, du \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

крамеровским определителем которой является вронскиан $W(x)$ вектор-функций (6).

Сформулируем основные результаты.

Т е о р е м а 1. *Если* $\mathbf{y}(x)$ *есть решение задач* (1), (2), *то* $\mathbf{y}(x)$ *удовлетворяет алгебраической системе уравнений* (7).

Т е о р е м а 2. *Если система* (7) *совместна при некотором* $x = x_0$ *и имеет ранг* r, *то дифференциальная система* (1), (2), *разрешима и ее общее решение содержит* $n - r$ *произвольных* (*линейно входящих*) *постоянных* *.

Таким образом, (7) представляет собою п о л н у ю с и с т е м у и н т е г р а л о в з а д а ч и (1), (2). Решая эту систему по формулам Крамера, при $W(x) \neq 0$, получаем формулы метода Коши — Грина: это следует из известной связи между фундаментальными матрицами решений основной и сопряженной однородных систем уравнений.

В частности, для краевой задачи (1), (3) решаем уравнение (4) с начальными значениями $\mathbf{z}(0) = \mathbf{a}_i$ (прямая прогонка), параллельно — с начальными значениями $\mathbf{z}(1) = \mathbf{b}_i$ (обратная прогонка, н е з а в и с я щ а я от первой), получим соответствующие функции $\mathbf{z}_i(x, 0)$ и $\mathbf{z}_i(x, 1)$, и система (7) принимает вид и н т е г р а л о в к р а е в о й з а д а ч и

$$(\mathbf{w}_i(x), \mathbf{y}(x)) = c_i + \int_0^x (\mathbf{z}_i(u, 0), \mathbf{f}(u))\, du + \int_1^x (\mathbf{z}_i(u, 1), \mathbf{f}(u))\, du,$$

где $\mathbf{w}_i(x) = \mathbf{z}_i(x, 0) + \mathbf{z}_i(x, 1)$.

Для доказательства обеих теорем с каждой суммируемой квадратной

---

* Тем самым, по теореме 1, *система* (7) *совместна при всех* x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, *и имеет всюду ранг* r.

матрицей $P = P(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, сопоставляем ее матрицант

$$M(x, s; P) = E + \int_s^x P(u)\,du + \int_s^x P(u)\,du \int_s^u P(v)\,dv + \ldots \tag{8}$$

(E — единичная матрица) — функциональную матрицу, обладающую, как известно ([8]), следующими свойствами (в 1) 2), 3) букву P не пишем): 1) она абсолютно непрерывна по x, по s и почти всюду $\partial M(x, s) / \partial x = P(x) M(x, s)$; 2) $M(s, s) = E$; 3) $M(x, s) M(s, t) = M(x, t)$; 4) $M(x, s; -P^*) = M^*(s, x; P)$.

Из этих свойств сразу получается следующее тождество для всякого решения $\mathbf{y}(x)$ уравнения (1): если для матрицы $P = P(x)$ уравнения (1) матрицант $M(x, s; -P)$ обозначить $A(x, s)$,

$$\mathbf{y}(x) = A(x, s)\,\mathbf{y}(s) + \int_s^x A(x, u)\,\mathbf{f}(u)\,du; \tag{9}$$

и обратно: функция вида (9) с заранее заданным вектором $\mathbf{b}$ на месте $\mathbf{y}(s)$ удовлетворяет уравнению (1) и имеет $\mathbf{y}(s) = \mathbf{b}$.

Докажем теорему 1. Пусть $\mathbf{y}(x)$ удовлетворяет (1), (2). Напишем для нее тождество (9), поменяем в нем x, s местами, подставим условия (2) и переместим матричный множитель со второго члена скалярного произведения на первый; получим после простых преобразований

$$\left(\int_0^1 A^*(s, x)\,\mathbf{a}_i(s)\,d\sigma(s), \mathbf{y}(x) \right) = c_i + \int_0^1 d\sigma(s) \int_s^x (A^*(s, u)\,\mathbf{a}_i(s), \mathbf{f}(u))\,du. \tag{10}$$

Но в силу свойства 4) матрица $A^*(s, x) = M^*(s, x; -P)$ является матрицантом $M(x, s; P^*) = B(x, s)$ матрицы $P^* = -(-P^*)$, и поэтому функция

$$\mathbf{z}_i(u, s) = A^*(s, u)\,\mathbf{a}_i(s) = B(u, s)\,\mathbf{a}_i(s) \tag{11}$$

на основании соответствующего тождества типа (9) удовлетворяет дифференциальной задаче (4), (5), т. е. совпадает с так же обозначенной функцией пункта 1. Следовательно, (10) совпадает с (7), что и требовалось доказать.

Докажем теорему 2. Пусть числовая система

$$(\mathbf{w}_i(x_0), \mathbf{y}) = c_i + \int_0^1 d\sigma(s) \int_s^{x_0} (\mathbf{z}_i(u, s), \mathbf{f}(u))\,du \tag{12}$$

совместна, имеет ранг r и общее решение

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + l_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + l_m \mathbf{b}_m \qquad (m = n - r)$$

стандартной структуры: $\mathbf{b}_0$ есть частное решение полной системы (12), $\mathbf{b}_j$ — линейно независимые решения соответствующей однородной системы, l_j — произвольные постоянные ($j = 1, 2, \ldots, m$). Но тогда функция

$$\mathbf{y}(x) = A(x, x_0)\,\mathbf{b} + \int_{x_0}^x A(x, u)\,\mathbf{f}(u)\,du \tag{13}$$

в силу (9) удовлетворяет уравнению (1) и содержит m произвольных постоянных (и очевидным образом представляется в соответствующей стандартной — для решений дифференциальных уравнений — форме). Для проверки условия (2) заменяем в (13) x на s и подставляем в левую часть (2).

Повторяя выкладки доказательства теоремы 1, получаем число

Но, по (13), $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{b}$, и поэтому (14), в силу (12), равно числу c_i. Теорема доказана.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
16 IX 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Камке, Справочник по обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1951. [2] И. М. Гельфанд, О. В. Локуциевский, Метод «прогонки» для решения разностных уравнений (Добавление II в книге: С. К. Годунов. В. С. Рябенький, Введение в теорию разностных схем, М., 1962). [3] С. К. Годунов, УМН, **16**, № 3, 171 (1961). [4] А. А. Абрамов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **1**, № 2, 349 (1961). [5] А. А. Абрамов, Там же, **1**, № 3, 542 (1961). [6] П. И. Монастырский, Там же, **7**, № 2, 284 (1967). [7] Дж. Н. Ланс, Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962. [8] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1953.