Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 2

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Е. ЩЕПИН

О ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К НОРМАЛЬНЫМ, И ИХ БИКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 3 XII 1969)

1. Постановка вопроса. Среди бикомпактных расширений пространства X особого внимания заслуживают три: пространство βX (Чеха — Стоуна), пространство ωX (Уолмена), и пространство $\omega_\varkappa X$ (Пономарева — Зайцева). Пространства βX и ωX являются бикомпактными расширениями пространства X во всех случаях, когда они определены, т. е. ωX — для всех T_1-пространств, а βX — для всех тихоновских (вполне регулярных) пространств. Пространство $\omega_\varkappa X$, определенное В. И. Пономаревым и подробно исследованное В. И. Зайцевым ([1-3]), замечательно тем, что (как доказал Зайцев *) оно всегда является предельным пространством конечного проекционного спектра пространства X. Зайцев доказал также, что $\omega_\varkappa X$ является бикомпактным расширением для широкого класса введенных им T_λ-пространств X, охватывающего, в частности, все регулярные пространства **.

Давно известно, что пространства βX и ωX совпадают тогда и только тогда, когда пространство X нормально. Зайцев доказал, что пространства $\omega_\varkappa X$ и βX совпадают для определенного им класса квазинормальных пространств и только для них. В настоящей заметке решается вопрос: для каких пространств X совпадают пространства ωX и $\omega_\varkappa X$? Оказывается, для этого необходимо и достаточно, чтобы пространство X было полунормальным в смысле, который мы сейчас установим.

2. Полунормальные пространства. В. И. Зайцев называет квазинормальными такие регулярные пространства, в которых любые два дизъюнктные непересекающиеся π-множества содержатся в дизъюнктных открытых множествах (которые, очевидно, всегда могут быть предположены $\varkappa o$-множествами).

Определение 1. Полунормальным называется всякое T_1-пространство, в котором любые два дизъюнктных замкнутых множества содержатся в дизъюнктных π-множествах ***.

Замечание 1. Очевидно, получим тот же класс пространств, потребовав лишь, чтобы для любых двух дизъюнктных замкнутых множеств A_1 и A_2 существовало π-множество, содержащее A_1 и не пересекающееся с A_2.

Непосредственным следствием этого определения является

Предложение 1. *Пространство X нормально, если оно одновременно является квазинормальным и полунормальным.*

В. И. Зайцев заметил, что существуют квазинормальные пространства, не являющиеся нормальными,— таковы, в частности, все ненормальные

* По всем вопросам, касающимся пространства $\omega_\varkappa X$, см. ([1-3]).

** T_λ-пространства могут быть определены как такие T_1-пространства, в которых всякая точка и всякое не содержащее ее замкнутое множество лежат в дизъюнктных π-множествах. При этом π-множества определены В. И. Зайцевым как множества, являющиеся пересечением конечного числа канонических замкнутых множеств. (Множество называется канонически замкнутым, или $\varkappa a$-множеством, если оно есть замыкание своего открытого ядра. Множества, дополнительные к $\varkappa a$-множествам, называются канонически открытыми, или $\varkappa o$-множествами).

*** Таким образом, всякое полунормальное пространство является T_λ и, значит, тем более полурегулярным пространством; переход от T_λ-пространств к полунормальным вполне аналогичен переходу от регулярных пространств к нормальным. Всякое бикомпактное полурегулярное пространство полунормально.

экстремально несвязные пространства, а также, например, известное пространство Немыцкого. Небольшим видоизменением конструкции Немыцкого можно получить и пример тихоновского пространства, не являющегося квазинормальным. Как показал Зайцев, всякое квазинормальное пространство вполне регулярно; следовательно, класс квазинормальных пространств, содержась в классе тихоновских и охватывая все нормальные пространства, не совпадает ни с одним из этих классов. С другой стороны, из предложения 1 вытекает, что ненормальное квазинормальное пространство не может быть полунормальным; в то же время тихоновское полунормальное (но ненормальное) пространство (а такие пространства существуют) никогда не является квазинормальным.

Предложение 2. *Не всякое полунормальное пространство является хаусдорфовым; не всякое хаусдорфово полунормальное пространство регулярно.*

3. Основная теорема. *Для того чтобы пространства ωX и $\omega_\varkappa X$ совпадали между собой (в силу гомеоморфизма, оставляющего неподвижными все точки $x \in X$) необходимо и достаточно, чтобы пространство X было полунормальным; в этом случае $\omega_\varkappa X$ также полунормально.*

Лемма. *Пусть X — пространство, для которого $\omega_\varkappa X$ является (бикомпактным) расширением и i: $X \to \omega_\varkappa X$ — естественное отображение пространства X в пространство $\omega_\varkappa X$. Пусть множества $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$ замкнуты в X. Замыкания $[iA]$ и $[iB]$ в $\omega_\varkappa X$ тогда и только тогда дизъюнктны, когда в X существуют дизъюнктные π-множества $C \supseteq A$ и $D \supseteq B$.*

Доказательство леммы. Условие достаточно. В самом деле, пусть существуют дизъюнктные π-множества $C = \bigcap\limits_{k=1}^{m} C_k$, $D = \bigcap\limits_{k=1}^{n} D_k$ (причем C_k и D_k суть $\varkappa a$-множества в X). Для любого $\varkappa a$-множества $Q \subseteq X$ обозначаем через $\widetilde{Q}$ множество всех таких $\xi \in \omega_\varkappa X$, что $Q \in \xi$. Совокупность всех $\widetilde{Q}$ образует по определению замкнутую базу пространства $\omega_\varkappa X$.

Множества $\widetilde{C} = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \widetilde{C}_k$ и $\widetilde{D} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \widetilde{D}_k$ дизъюнктны, $\widetilde{C} \supseteq [iA]$, $\widetilde{D} \supseteq [iB]$, значит, $[iA] \cap [iB] = \Lambda$.

Условие необходимо. Пусть $[iA] \cap [iB] = \Lambda$. Имеем $[iA] = \bigcap\limits_{\widetilde{A}_\alpha \supseteq iA} \widetilde{A}_\alpha$, $[iB] = \bigcap\limits_{\widetilde{B}_\beta \supseteq iB} \widetilde{B}_\beta$, и, следовательно, по предположению $\bigcap\limits_{\alpha,\beta} \widetilde{A}_\alpha \cap \widetilde{B}_\beta = \Lambda$.

Отсюда следует (так как $\omega_\varkappa X$ бикомпактно), что система $\{A_\alpha\} \cup \{B_\alpha\}$ не центрирована. Значит, имеются такие $\widetilde{A}_{\alpha_1}, \ldots, \widetilde{A}_{\alpha_m}$ и $\widetilde{B}_{\beta_1}, \ldots, \widetilde{B}_{\beta_n}$, что $\bigcap\limits_{=1}^{m} A_{\alpha_k} \cap \bigcap\limits_{k=1}^{n} B_{\beta_k} = \Lambda$. В то же время $\bigcap\limits_{k=1}^{m} \widetilde{A}_{\alpha_k} \supseteq iA$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_{\beta_k} \supseteq iB$. Легко видеть, что из $\widetilde{A}_\alpha \supseteq iA$ следует $A_\alpha \supseteq A$, так что $C = \bigcap\limits_{k=1}^{m} A_{\alpha_k} \supseteq A$, и аналогично $D = \bigcap\limits_{k=1}^{n} B_{\beta_n} \supseteq B$. Множества C, D и суть искомые π-множества: их пересечение пусто, так как в противном случае было бы $\bigcap\limits_{k=1}^{m} \widetilde{A}_{\alpha_k} \cap$ $\cap \bigcap\limits_{k=1}^{n} B_{\beta_k} \neq \Lambda$. Лемма доказана.

Переходим к доказательству основной теоремы.

1^0. Пусть X полунормально и $\zeta \in \omega X$. Обозначим через $\varkappa\zeta$ систему $\varkappa a$-множеств, содержащихся в ζ. Докажем, что $\varkappa\zeta \in \omega_\varkappa X$. В самом деле, в противном случае имелось бы такое $\varkappa a$-множество $C \subset X$, $C \notin \zeta$, что $\{C\} \cup \varkappa\zeta$ — центрированная система. Но из $C \notin \xi$ следует существование такого $A \in \zeta$, что $A \cap C = \Lambda$. Из полунормальности пространства X вытекает существование таких $\varkappa a$-множеств $D_1, \ldots, D_n$, что $D = \bigcap_{k=1}^{n} D_k \supseteq A$, $D \cap C = \Lambda$. Но из $D \supseteq A \in \zeta$ следует, что $D \in \zeta$, значит, $D_k \in \zeta$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, и $C \cap D_1 \cap \ldots \cap D_n = \Lambda$, что противоречит центрированности системы $C \cup \varkappa\zeta$. Итак, мы построили отображение $\varkappa$: $\omega X \to \omega_\varkappa X$, очевидно, являющееся отображением на все $\omega_\varkappa X$.

Докажем, что отображение $\varkappa$: $\omega X \to \omega_\varkappa X$ взаимно однозначно. В противном случае некоторую систему $\xi \in \omega_\varkappa X$ можно было бы дополнить до двух различных $\zeta_1 \in \omega X$, $\zeta_2 \in \omega X$, $\zeta_1 \cap \zeta_2 \supseteq \xi$. Так как $\zeta_1 \neq \zeta_2$, то существуют дизъюнктные замкнутые в X множества $B \in \zeta_1$, $B_2 \in \zeta_2$ и, значит, в силу полунормальности X, существуют $\varkappa a$-множества $D_1, \ldots, D_n$ такие, что $B_1 \subseteq D = \bigcap_{k=1}^{n} D_k \subseteq X \setminus B_2$. Система $\{D_n\} \cup \xi$ центрирована и состоит из $\varkappa a$-множеств. В силу максимальности системы ξ имеем $D_k \in \xi$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Но $\bigcap_{k=1}^{n} D_k \cap B_i = \Lambda$ — вопреки тому, что $D_1, \ldots, D_n$ содержатся в ζ_2. Противоречие.

Доказываем непрерывность отображения $\varkappa$: $\omega X \to \omega_\varkappa X$. Вспомним, что замкнутой базой пространства $\omega_\varkappa X$ является совокупность всех $\tilde{C}$, где C пробегает семейство всех $\varkappa a$-множеств в X, а замкнутая база пространства ωX есть совокупность всех Φ_F (где Φ_F — множество всех $\xi \in \omega X$, $\xi \ni F$, а F пробегает семейство всех замкнутых множеств в X). Очевидно, $\varkappa^{-1}\tilde{C} = \Phi_C$ для всякого $\varkappa a$-множества $C \subseteq X$. Итак, прообраз при отображении $\varkappa$ любого элемента $\tilde{C}$ замкнутой базы пространства $\omega_\varkappa X$ есть замкнутое множество пространства ωX. Непрерывность отображения $\varkappa$: $\omega X \to \omega_\varkappa X$ отсюда следует.

Аналогично непрерывность отображения $\varkappa^{-1}$: $\omega_\varkappa X \to \omega X$ будет доказана, если мы убедимся в том, что для всякого замкнутого $F \subseteq X$ прообраз $(\varkappa^{-1})^{-1}\Phi_F = \varkappa\Phi_F$ при отображении множества Φ_F замкнут в $\omega_\varkappa X$. Но всякое замкнутое $F \subseteq X$ есть пересечение некоторых $\varkappa a$-множеств C_α: $F = \bigcap_\alpha C_\alpha$ (это следует из того, что X, будучи полунормальным, и подавно полурегулярно). Значит, $\varkappa\Phi_F = \varkappa\Phi_{\bigcap_\alpha C_\alpha} = \bigcap \varkappa\Phi_{C_\alpha} = \bigcap_\alpha \tilde{C}_\alpha$, что и доказывает нужное утверждение. Итак, $\varkappa$ есть топологическое отображение пространства ωX на $\omega_\varkappa X$, очевидно, оставляющее неподвижными все точки X. Первая часть теоремы (достаточность) доказана. Переходим ко второй части.

2^0. Пусть $\omega X = \omega_\varkappa X$ и X не полунормально. Тогда в X имеются такие дизъюнктные замкнутые множества A_1 и A_2, что всякое π-множество D, содержащее множество A_1, непременно пересекается с A_2. Так как по предположению $\omega_\varkappa X$ есть бикомпактное расширение пространства X, то можем применить лемму, в силу которой $[iA_1] \cap [iA_2] \neq \Lambda$. С другой стороны, из $A_1 \cap A_2 = \Lambda$ следует, что и $\Phi_{A_1} \cap \Phi_{A_2} = \Lambda$, причем $\Phi_{A_1} = [jA_1]$, $\Phi_{A_2} = [jA_2]$, где j — естественное отображение j: $X \to \omega X$ и, значит, $[jA_1] \cap [jA_2] = \Lambda$. Если бы существовало топологическое отображение j пространства ωX на $\omega_\varkappa X$, оставляющее неподвижными все точки X, то было бы $f([jA_1] \cap [jA_2]) = f([jA_1]) \cap f([jA_2]) = [iA_1] \cap [iA_2] = \Lambda$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Возникает вопрос, нельзя ли определение полунормального пространства упростить, заменив в нем π-множества $\varkappa a$-множествами. Ответ на этот вопрос отрицателен: при этой замене получим класс пространств, отличный от полунормальных. Аналогичный вопрос в применении к квазинормальным пространствам до сих пор не решен.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
31 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Зайцев, ДАН, 171, № 3, 521 (1966). [2] В. И. Зайцев, ДАН, 178, № 4, 778 (1968). [3] V. Zaicev, Math. Ann., 179, 153 (1969).