Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

И. Ц. ГОХБЕРГ, Н. Я. КРУПНИК

О СИМВОЛАХ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА РАЗОМКНУТОМ КОНТУРЕ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 22 VII 1969)

1. Одномерным сингулярным интегральным оператором называется оператор A, определенный равенством

$$(A\varphi)(t) = c(t)\varphi(t) + \frac{d(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \quad (t \in \Gamma), \tag{1}$$

где Γ — контур на комплексной плоскости; $c(t)$ и $d(t)$ $(t \in \Gamma)$ — заданные функции (или матрицы-функции), которые называются коэффициентами оператора A.

В дальнейшем будет предполагаться, что контур Γ состоит из конечного числа замкнутых и разомкнутых простых контуров типа Ляпунова. Сингулярные интегральные операторы будут рассматриваться в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$, а в случае, когда $c(t)$ и $d(t)$ — матрицы-функции порядка n,— в пространстве $L_2^n(\Gamma)$ вектор-функций $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$, где $\varphi_j \in L_2(\Gamma)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_n$ наименьшую подалгебру банаховой алгебры $\mathfrak{R}_n$ всех линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $L_2^n(\Gamma)$, содержащую все операторы вида (1) с кусочно-непрерывными коэффициентами.

В настоящей заметке доказывается, что фактор-алгебра $\mathfrak{A}_n / \mathfrak{S}_\infty$, где $\mathfrak{S}_\infty$ — идеал всех вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{R}_n$, изоморфна и изометрична некоторой алгебре матриц-функций порядка $2n$, определенных на цилиндре $\mathfrak{M} = \{(t, \mu): t \in \Gamma, 0 \leqslant \mu \leqslant 1\}$. Этот изоморфизм сопоставляет каждому оператору из $\mathfrak{A}_n$ его символ. Доказывается также, что оператор $A\,(\in \mathfrak{A}_n)$ является Ф-оператором в том и только том случае, когда его символ в каждой точке цилиндра является невырожденной матрицей. Устанавливается формула для вычисления индекса Ф-операторов, принадлежащих алгебре $\mathfrak{A}_n$. Для случая, когда контур Γ состоит только из замкнутых линий, эти результаты получены авторами в статье [1].

2. Условимся о следующих обозначениях: $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$ — множество всех кусочно-непрерывных на Γ функций, которые непрерывны на концах разомкнутых дуг контура Γ и непрерывны слева на всем контуре Γ; Λ_n — множество всех матриц-функций порядка n с элементами из Λ; S — оператор сингулярного интегрирования вдоль Γ:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \quad (t \in \Gamma),$$

действующий в пространстве $L_2(\Gamma)$, и S_n — оператор сингулярного интегрирования в $L_2^n(\Gamma)$, т. е. $S_n\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \{S\varphi_j\}_{j=1}^n$. Оператор $A = c(t)I + d(t)S$, где $c(t), d(t) \in \Lambda_n$, удобно будет записывать в виде

$$A = F(t)P + G(t)Q, \tag{2}$$

где $F(t) = c(t) + d(t)$, $G(t) = c(t) - d(t)$, $P = (I + S_n)/2$ и $Q = (I - S_n)/2$.

Пусть контур Γ, наряду с замкнутыми линиями, содержит N разомкнутых дуг, начала и концы которых обозначим соответственно через α_k и β_k $(k = 1, \ldots, N)$.

Символом оператора A, определенного равенством (2), назовем матрицу-функцию $\mathscr{A}(t, \mu)$ порядка $2n$, определенную на цилиндре $\mathfrak{M}$ равенством

$$\mathscr{A}(t, \mu) = \begin{cases} \begin{pmatrix} F(\alpha_k)\mu + G(\alpha_k)(1-\mu) & 0 \\ 0 & F(\alpha_k)\mu + G(\alpha_k)(1-\mu) \end{pmatrix} & \text{при } t = \alpha_k, \\ \begin{pmatrix} F(t+0)\mu + F(t)(1-\mu) & \sqrt{\mu(1-\mu)}\,(G(t+0) - G(t)) \\ \sqrt{\mu(1-\mu)}\,(F(t+0) - F(t)) & G(t+0)(1-\mu) + G(t)\mu \end{pmatrix} & \text{при } t \in \Gamma, \ t \neq \alpha_k, \beta_k, \\ \begin{pmatrix} F(\beta_k)(1-\mu) + G(\beta_k)\mu & 0 \\ 0 & F(\beta_k)(1-\mu) + G(\beta_k)\mu \end{pmatrix} & \text{при } t = \beta_k. \end{cases}$$

Теорема 1. *Для того чтобы оператор $A = F(t)P + G(t)Q$, где $F(t)$, $G(t) \in \Lambda_n$, был Φ-оператором в $L_2^n(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы его символ нигде не вырождался, т. е.*

$$\det \mathscr{A}(t, \mu) \neq 0 \quad (t \in \Gamma, 0 \leqslant \mu \leqslant 1). \tag{3}$$

Доказательство. Дополним контур Γ до контура $\widetilde{\Gamma}$, состоящего из конечного числа замкнутых простых ориентированных кривых типа Ляпунова. Пусть $\widetilde{F}(t)$ и $\widetilde{G}(t)$ $(t \in \widetilde{\Gamma})$ — некоторые матрицы-функции, совпадающие соответственно с $F(t)$ и $G(t)$ на Γ, непрерывные на замкнутом множестве $\overline{\widetilde{\Gamma}\setminus\Gamma}$ и невырожденные в каждой точке открытого множества $\widetilde{\Gamma}\setminus\Gamma$. Через $\widetilde{S}_n$ обозначим матричный оператор сингулярного интегрирования вдоль $\widetilde{\Gamma}$, а через $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — соответственно операторы $(I + \widetilde{S}_n)/2$, $(I - \widetilde{S}_n)/2$.

Рассмотрим оператор

$$\widetilde{A} = B_n(\widetilde{F}\widetilde{P} + \widetilde{G}\widetilde{Q})B_n + C_n(\widetilde{G}\widetilde{P} + \widetilde{F}\widetilde{Q})C_n,$$

где $B_n = \|\delta_{jk}B\|_{j,k=1}^{n}$, $C_n = I - B_n$, а B — оператор умножения в $L_2(\widetilde{\Gamma})$ на характеристическую функцию множества Γ. Оператор $\widetilde{A}$ представляет собой сумму произведений сингулярных интегральных операторов в $L_2^n(\Gamma)$ с кусочно-непрерывными матричными коэффициентами. В работе [1] определяется символ $\widetilde{\mathscr{A}}(t, \mu)$ такого оператора. Из этого определения, в частности, следует, что $\det \widetilde{\mathscr{A}}(t, \mu) = \det \mathscr{A}(t, \mu)$, если $t \in \Gamma$, и $\det \widetilde{\mathscr{A}}(t, \mu) = \det \widetilde{G}(t)\widetilde{F}(t)$, если $t \in \widetilde{\Gamma}\setminus\Gamma$.

Пусть выполнено условие (3), тогда $\det \widetilde{\mathscr{A}}(t, \mu) \neq 0$ $(t \in \Gamma, 0 \leqslant \mu \leqslant 1)$, следовательно [1], оператор $\widetilde{A}$ является Φ-оператором в $L_2^n(\widetilde{\Gamma})$, и, стало быть, оператор A является Φ-оператором в $L_2^n(\Gamma)$.

Обратно, пусть оператор A является Φ-оператором в $L_2^n(\widetilde{\Gamma})$, тогда оператор $A_1 = B_n\widetilde{A}B_n + C_n$ является Φ-оператором в $L_2^n(\widetilde{\Gamma})$ и, следовательно, $\det \mathscr{A}_1(t, \mu) \neq 0$ $(t \in \widetilde{\Gamma}, 0 \leqslant \mu \leqslant 1)$. Нетрудно проверить, что если $\det \mathscr{A}_1(t, \mu) \neq 0$, то символ $\mathscr{A}_2(t, \mu)$ оператора $A_2 = B_n + C_n\widetilde{A}C_n$ также всюду невырожден, и, стало быть, оператор A_2 является Φ-оператором в $L_2(\widetilde{\Gamma})$. Отсюда вытекает, что оператор $\widetilde{A}$ является Φ-оператором в $L_2(\Gamma)$. Так как $\det \widetilde{\mathscr{A}}(t, \mu) = \det \mathscr{A}(t, \mu)$ для точек $t \in \Gamma$, то $\det \mathscr{A}(t, \mu) \neq 0$ $(t \in \Gamma, 0 \leqslant \mu \leqslant 1)$. Теорема доказана.

3. Введем на цилиндре $\mathfrak{M} = \{(t, \mu) : t \in \Gamma, 0 \leqslant \mu \leqslant 1\}$ топологию, определив окрестность каждой точки одним из пяти равенств:

$$u(\alpha_k, 0) = \{(\alpha_k, \mu) : 0 \leqslant \mu < \varepsilon\}; \quad u(\beta_k, 1) = \{(\beta_k, \mu) : \varepsilon < \mu \leqslant 1\},$$
$$u(t_0, 0) = \{(t, \mu) : |t - t_0| < \delta, t \prec t_0, 0 \leqslant \mu \leqslant 1\} \cup \{(t_0, \mu) : 0 \leqslant \mu < \varepsilon\} \quad (t_0 \neq \alpha_k),$$
$$u(t_0, 1) = \{(t, \mu) : |t - t_0| < \delta, t \succ t_0, 0 \leqslant \mu \leqslant 1\} \cup \{(t_0, \mu) : \varepsilon < \mu \leqslant 1\} \quad (t_0 \neq \beta_k),$$
$$u(t_0, \mu_0) = \{(t_0, \mu) : \mu - \delta_1 < \mu < \mu_0 + \delta_2\} \quad (\mu_0 \neq 0; 1),$$

где $0 < \delta_1 < \mu_0$, $0 < \delta_2 < 1 - \mu_0$, $0 < \varepsilon < 1$, а $t \prec t_0$ означает, что на ориентированном контуре Γ точка t предшествует точке t_0.

Через $\mathscr{S}_n$ обозначим алгебру матриц функций порядка $2n$ вида $H(t, \mu) = (H_{jk}(t, \mu))_{j,k=1}^2$, где $H_{jk}(t, \mu)$ — произвольные матрицы-функции порядка n, удовлетворяющие условиям: а) матрицы-функции $H_{11}(t, \mu)$, $H_{12}(t, \mu)$, $H_{21}(t, \mu)$ и $H_{22}(t, 1-\mu)$ непрерывны на цилиндре $\mathfrak{M}$ с введенной выше топологией; б) матрицы $H_{21}(t, \mu)$ и $H_{12}(t, \mu)$ обращаются в нулевые, если μ принимает одно из значений 0; 1, а t — произвольная точка контура, а также, когда t принимает одно из значений α_k, β_k $(k = 1, \ldots, N)$, а μ — любое число отрезка $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Алгебра $\mathscr{S}$ становится банаховой алгеброй, если ввести в ней норму равенством $\|H(t, \mu)\| = \sup\limits_{t \in \Gamma,\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1} s_1(H(t, \mu))$, где число $[s_1(H(t, \mu))]^2$ для каждой точки цилиндра $\mathfrak{M}$ обозначает наибольшее собственное число матрицы $H(t, \mu)(H(t, \mu))^*$.

Т е о р е м а 2. *Пусть A_{jl} $(j = 1, \ldots, k;\ l = 1, \ldots, m)$ — сингулярные интегральные операторы с матричными коэффициентами из Λ_n и пусть $\mathscr{A}_{jl}(t, \mu)$ — их символы. Тогда для оператора*

$$A = \sum_{j=1}^{k} \prod_{l=1}^{m} A_{jl} \tag{4}$$

имеет место равенство

$$\inf_{T \in \mathfrak{S}_\infty} \|A + T\| = \|\mathscr{A}(t, \mu)\|, \tag{5}$$

в котором

$$\mathscr{A}(t, \mu) = \sum_{j=1}^{k} \prod_{l=1}^{m} \mathscr{A}_{jl}, \tag{6}$$

а норма в правой части равенства (5) *является нормой в алгебре $\mathscr{S}_n$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2 из ([1]).

Матрицу-функцию (6) естественно назвать с и м в о л о м оператора (4). Из равенства (5) следует, что символ оператора A не зависит от способа представления оператора A в виде (4).

Пусть $\mathfrak{A}_n$ — алгебра, полученная замыканием множества операторов вида (4) в алгебре $\mathfrak{R}_n$. Равенство (5) позволяет определить символ $\mathscr{A}(t, \mu)$ для каждого оператора $A \in \mathfrak{A}_n$ как предел в алгебре $\mathscr{S}_n$ последовательности символов $\mathscr{A}_r(t, \mu)$ операторов A_r вида (4), равномерно сходящихся к оператору A.

Т е о р е м а 3. *Двусторонний идеал $\mathfrak{S}_\infty$ всех вполне непрерывных операторов, действующих в $L_2^n(\Gamma)$, содержится в алгебре $\mathfrak{A}_n$, и фактор-алгебра $\mathfrak{A}_n / \mathfrak{S}_\infty$ изоморфна и изометрична алгебре $\mathscr{S}_n$. При этом изоморфизме класс вычетов, содержащий оператор $A \,(\in \mathfrak{A}_n)$, отображается в символ $\mathscr{A}(t, \mu)$ оператора A. Для того чтобы оператор $A \,(\in \mathfrak{A}_n)$ был Ф-оператором в $L_2^n(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det \mathscr{A}(t, \mu) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$ и $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теорем 4.1 и 4.2 из ([1]).

4. Установим формулу для вычисления индекса Ф-операторов из алгебры $\mathfrak{A}_n$. Напомним, что индексом Ф-оператора A называется число $\operatorname{ind} A$, равное разности $\dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A$.

В этом пункте мы дополнительно предполагаем, что контур Γ можно дополнить до замкнутого контура $\widetilde{\Gamma}$, ограничивающего связное множество M точек плоскости и, следовательно, состоящего из конечного числа замкнутых простых контуров типа Ляпунова. Будем также предполагать, что точка $z = 0$ является внутренней точкой множества M.

Т е о р е м а 4. *Пусть оператор $A \in \mathfrak{A}_n$ и матрица-функция $\mathscr{A}(t, \mu) = \|H_{jk}(t, \mu)\|_{i,k=1}^2$ является его символом. Если* $\det \mathscr{A}(t, \mu) \neq 0$ $(t \in \Gamma,$

$0 \leqslant \mu \leqslant 1$), *то функция*

$$f_A(t, \mu) = \begin{cases} \det H_{22}(\alpha_k, \mu)\, H_{22}^{-1}(\alpha_k, 0) & \text{при } t = \alpha_k, \\ \det \mathcal{A}(t, \mu) \det H_{22}^{-1}(t, 0)\, H_{22}^{-1}(t, 1) & \text{при } t \in \Gamma \text{ и } t \neq \alpha_k, \beta_k, \\ \det H_{22}(\beta_k, \mu)\, H_{22}^{-1}(\beta_k, 1) & \text{при } t = \beta_k \end{cases}$$

непрерывна на $\mathfrak{M}$ *и*

$$\operatorname{ind} A = -\frac{1}{2\pi}[\arg f_A(t, \mu)]_{\mathfrak{M}}. \tag{7}$$

Поясним смысл правой части формулы (7). Если оператор имеет вид

$$A = \sum_{j=1}^{k} \prod_{l=1}^{m} (F_{jl}P + G_{jl}Q) \quad (F_{jl}, G_{jl} \in \Lambda_n), \tag{8}$$

то множество значений функции $f_A(t, \mu)$ состоит из конечного числа замкнутых непрерывных кривых, которые естественным образом ориентированы: в точках непрерывности всех матриц-функций $F_{jl}(t)$ и $G_{jl}(t)$ движение по кривой $f_A(t, \mu)$ определяется изменением t по контуру в положительном направлении, а вдоль дополнительных дуг определяется изменением μ от 0 до 1. Число $[\arg f_A(t, \mu)]_{\mathfrak{M}/2\pi}$ равно числу оборотов кривой $f_A(t, \mu)$ вокруг начала координат.

Пусть $A \in \mathfrak{A}_n$, тогда функция $f_A(t, \mu)$ является равномерным пределом последовательности функций $f_{A_N}(t, \mu)$, где A_N — операторы вида (8). Число $[\arg f_{A_N}(t, \mu)]_{\mathfrak{M}}$ при достаточно больших N не зависит от N и по определению

$$[\arg f_A(t, \mu)]_{\mathfrak{M}} = \lim_{N \to \infty} [\arg f_{A_N}(t, \mu)]_{\mathfrak{M}}.$$

Доказательство теоремы 4 проводится по следующей схеме. Так как обе части в формуле (7) являются непрерывными функциями от оператора A, то эту формулу достаточно установить для операторов вида (9). Пусть A — оператор вида (9) и $L = \Xi(F_{jl}P + G_{jl}Q)$ — его линейное растяжение (см. [2]). Оператор L представляет собой сингулярный интегральный оператор с матричными коэффициентами в пространстве $L_2^r(\Gamma)$, где $r = (mk - k + 1)n$. Пусть $\tilde{F}_{jl}(t)$ и $\tilde{G}_{jl}(t)$ $(t \in \tilde{\Gamma})$ — соответственно некоторые матрицы-функции, совпадающие с $F_{jl}(t)$ и $G_{jl}(t)$ на контуре Γ и непрерывные на замкнутом множестве $\overline{\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma}$, тогда $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind}(B_r\tilde{L}B_r + C_r)$, где $\tilde{L} = \Xi(\tilde{F}_{jl}\tilde{P} + \tilde{G}_{jl}\tilde{Q})$. Таким образом, задача вычисления индекса оператора A сводится к задаче вычисления индекса оператора $\tilde{A} = B_r\tilde{L}B_r + C_r$, действующего в $L_2^r(\tilde{\Gamma})$, которая решена в [1]. Из приведенной в [1] формулы для индекса оператора $\tilde{A}$ легко выводится формула (8).

5. Пусть $t_1, \ldots, t_r$ $(r = 0, 1, \ldots)$ — фиксированные точки на контуре Γ, отличные от концов разомкнутых дуг. Через $\mathfrak{A}_n(t_1, \ldots, t_r)$ обозначим алгебру, полученную замыканием в алгебре $\mathfrak{R}_n$ множества операторов вида (8), у которых матрицы-функции $F_{jl}(t)$ и $G_{jl}(t)$ непрерывны во всех точках контура Γ, кроме, быть может, точек $t_1, \ldots, t_r$. В этом случае фактор-алгебра $\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_r) / \mathfrak{S}_\infty$ изоморфна и изометрична алгебре матриц-функций, заданных на контуре, который получается из контура Γ раздвоением каждой точки t_k $(k = 1, \ldots, r)$ на t_k^- и t_k^+ и добавлением отрезков с концами t_k^- и t_k^+, а также добавлением отрезков к каждому из концов α_k и β_k разомкнутых дуг.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев
Кишиневский государственный университет

Поступило
4 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Функциональн. анализ и его прилож., 4, в. 1 (1970). [2] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Матем. исслед., Кишинев, 4, в. 4 (1969).