Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 5

УДК 511.7 *МАТЕМАТИКА*

А. А. БЕРШТЕЙН

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК СПЕКТРА МАРКОВА В СПЕКТР ЛАГРАНЖА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 2 IX 1969)

Настоящая работа является развитием идей и методов работы Г. А. Фреймана ([1]).

Обозначения: x — последовательность натуральных чисел $a_0, \ldots, a_i, \ldots$;

$$[q_1; q_2, \ldots] = q_1 + \frac{1}{q_2 + \ldots}; \quad \lambda_i(\mathscr{L}) = a_i + [0; a_{i+1}, \ldots] + [0; a_{i-1}, \ldots, a_0];$$

$$\lambda(\mathscr{L}) = \overline{\lim_{i\to\infty}} \lambda_i(\mathscr{L});$$

$\{\lambda(\mathscr{L})\}$ — спектр Лагранжа; M — бесконечная в обе стороны последовательность натуральных чисел $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$; $\lambda_i(M) = a_i + \delta_i + \gamma_i$, где $\delta_i = [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots]$; $\gamma_i = [0; a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots]$; $\lambda(M) = \sup\limits_i \lambda_i(M)$;

$\{\lambda(M)\}$ — спектр Маркова; $\alpha = 4\sqrt{30}/7$, $\beta = \sqrt{689}/8$.

Последовательность $M_1, M_2, \ldots, M_j, \ldots$ назовем *сходящейся* к последовательности M, если для любого целого j имеем

$$\lim_{j\to\infty} a_i^{(j)} = a_i, \quad \lim_{j\to\infty} \lambda(M_j) = \lambda(M).$$

Последовательность $\{M_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, назовем *стабилизирующейся справа (слева)*, если существует натуральное j_0 и целое i_0 такие, что при $i > i_0$ и $j > j_0$ (соответственно $i < i_0$)

$$a_i^{(j)} = a_i. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $\lambda(M) \in (\alpha, \beta)$. Если существует последовательность $\{M_j\}$, сходящаяся к M и не стабилизирующаяся как справа, так и слева, то $\lambda(M) \in \{\lambda(\mathscr{L})\}$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предполагаем, что $\lambda(M) = \lambda_0(M)$. Пусть для данного j условие (1) выполняется при $-i_0 \leqslant i \leqslant i_1$; $i_0, i_1 > 0$, $a_{-i_0-1}^{(j)} \neq a_{-i_0-1}$, $a_{i_1+1}^{(j)} \neq a_{i_1+1}$.

Определим последовательность $\overline{M}_j = \{\ldots, \bar{a}_{-1}, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots\}$ равенствами: $\bar{a}_i = a_i$, $-i_0 \leqslant i \leqslant i_1$; $\bar{a}_{i_1+1} = \bar{a}_{i_1+2} = 2$; $a_{i_1+3} = 1$; $\bar{a}_{i_1+4} = \bar{a}_{i_1+5} = \bar{a}_{i_1+6} = 2$; $\bar{a}_i = \bar{a}_{i-4}$, $i \geqslant i_1 + 6$; $\bar{a}_{-i_0-1} = \bar{a}_{-i_0-2} = 2$; $\bar{a}_{-i_0-3} = 1$; $\bar{a}_{-i_0-4} = \bar{a}_{-i_0-5} = \bar{a}_{-i_0-6} = 2$; $\bar{a}_i = \bar{a}_{i+4}$, $i \leqslant -i_0 - 6$, т. е. $\overline{M}_j = \{\ldots, \underbrace{2, 2, 2, 1}, 2, 2, a_{-i_0}, \ldots, a_{i_1}, 2, \underbrace{2, 1, 2, 2}, 2, \ldots\}$.

Для этой последовательности при $i > i_1$, $i < -i_0$ имеем

$$\lambda_i(\overline{M}_j) \leqslant \alpha, \tag{2}$$

так как для комбинаций $\left\{\begin{matrix}222\\ i\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}122\\ i\end{matrix}\right\}$ и $\left\{\begin{matrix}212\\ i\end{matrix}\right\}$ получим оценку $\lambda_i \leqslant \alpha$, если учесть, что наличие в M комбинаций $\{3\}$ и $\{1212\}$ дает $\lambda(M) > \beta$.

Пусть теперь $-i_0 \leqslant i \leqslant i_1$. Покажем, что

$$\delta_i(\overline{M}_j) \leqslant \max(\delta_i(M),\ \delta_i(M_j)), \tag{3}$$

$$\gamma_i(\overline{M}_j) \leqslant \max(\gamma_i(M),\ \gamma_i(M_j)). \tag{4}$$

Докажем неравенство (3), так как (4) доказывается аналогично. Пусть i имеет ту же четность, что и $i_1 - 1$. Пусть, например, $a_{i_1+1} = 2$, $a^{(j)}_{i_1+1} = 1$. Тогда

$$[0;\ a_i,\ \bar{a}_{i+1}, \ldots, a_{i_1},\ 2, \ldots] < [0;\ a_i, \ldots, a_{i_1},\ 1,\ \ldots]$$
для любых a_i, $i < i_1$. Поэтому

$$\delta_i(\overline{M}_j) \leqslant \delta_i(M_j). \tag{5}$$

Пусть теперь i имеет ту же четность, что i_1. Если $a_{i_1+2} = 1$, то

$$[0;\ a_i, \ldots, a_{i_1},\ 2,\ 2, \ldots] < [0;\ a_i, \ldots, a_{i_1},\ 2,\ 1, \ldots]. \tag{6}$$

Если $a_{i_1+2} = 2$, $a_{i_1+3} = 2$, то

$$[0;\ a_i, \ldots, a_{i_1},\ 2,\ 2,\ 1, \ldots] < [0;\ a_i, \ldots, a_{i_1},\ 2,\ 2,\ 2, \ldots]. \tag{7}$$

Если $a_{i_1+2} = 2$, $a_{i_1+3} = 1$, $a_{i_1+4} = 1$, то

$$[0;\ a_i, \ldots, a_{i_1}, 2, 2, 1, 2, \ldots] < [0;\ a_i, \ldots, a_{i_1}, 2, 2, 1, 1, \ldots]. \tag{8}$$

Если $a_{i_1+2} = 2$, $a_{i_1+3} = 1$, $a_{i_1+4} = a_{i_1+5} = 2$, то $a_{i_1+5} = 2$, так как иначе в M встретилась бы комбинация $\left\{ {2121 \atop i} \right\}$. Если $a_{i_1+2} = 2$, $a_{i_1+3} = 1$, $a_{i_1+4} = a_{i_1+5} = 2$ и $a_{i_1+6} = 1$, то

$$[0;\ a_i, \ldots, a_{i_1}, 2, 2, 1, 2, 2, 2, \ldots] < [0;\ a_i, \ldots, a_{i_1}, 2, 2, 1, 2, 2, 1, \ldots]. \tag{9}$$

Каждое из неравенств (6), (7), (8), (9) влечет выполнение неравенства

$$\delta_i(\overline{M}_j) < \delta_i(M).$$

Так как длина периода в $\overline{M}_j$ равна 4, неравенство (3) доказано полностью.

Из (1) — (4) следует

$$\lim_{j\to\infty} \lambda(\overline{M}_j) = \lambda(M). \tag{10}$$

Пусть

$$T_j,\ R_j \geqslant \max(2i_0,\ 2i_1), \tag{11}$$

причем $\bar{a}^{(j)}_{R_j} = 1$ и $\bar{\bar{a}}^{(j)}_{-T_j} = \bar{a}^{(j)}_{-T_j+1} = \bar{a}^{(j)}_{-T_j+2} = 2$.

Для последовательности

$$\mathscr{L} = \{a^{(1)}_{-T_1}, \ldots, a^{(1)}_{R_1},\ a^{(2)}_{-T_2}, \ldots, a^{(2)}_{R_2}, \ldots\}$$

ввиду (10) и (11)

$$\lambda(\mathscr{L}) = \lambda(M).$$

Непосредственным следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть $\lambda(M) \in (\alpha, \beta)$ и существует бесконечное множество последовательностей M', для которых $\lambda(M') = \lambda(M)$. Тогда $\lambda(M) \in \{\lambda(\mathscr{L})\}$.*

Мы говорим, что при некотором $\varepsilon > 0$ последовательность M обладает ε-свойством справа (слева), если существует целое число i_0 такое, что для любой последовательности $M' \neq M$, для которой $a_i = a_i'$ при $i < i_0$ (соответственно $i > i_0$), имеем $\lambda(M') > \lambda(M) + \varepsilon$. Если $\overline{\lim_{i\to+\infty}} \lambda_i(M) < \lambda(M)$, то последовательность называется непредельной.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda(M_1) \in (\alpha, \beta)$. *Для того чтобы* $\lambda(M_1) \overline{\in} \{\lambda(\mathscr{L})\}$, *необходимыми и достаточными являются следующие условия*:

1. *Существует лишь конечное число последовательностей* M_s, $1 \leqslant s \leqslant k$, *таких, что* $\lambda(M_1) = \lambda(M_2) = \ldots = \lambda(M_k)$.

2. *Последовательности* M_s *непредельные.*

3. *Последовательности* M_s *периодичны справа**, *т. е. существует такое целое число* i_0 *и натуральное число* p, *что при* $i > i_0$, $a_i = a_{i+p}$.

4. *Каждая из последовательностей* M_s, *периодичных в обе стороны, с периодом, равным периоду последовательности* M_s, *обладает* ε-*свойством справа, где* $\varepsilon = \lambda(M_s) - \overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \lambda_i(M_s)$.

Доказательство. Необходимость условия 1 следует из теоремы 2. Так как последовательность M_1 — непредельная (см. [2]), то существует целое число i_1 и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что $\lambda_i(M_1) < \lambda(M_1) - \varepsilon_1$ при $i > i_1$. Можно выбрать такое $s = s(\varepsilon_1)$, что если в M_1 и M' будет $a_i = a_i'$ для $i \leqslant j + s$ или $i \geqslant j - s$, то

$$\lambda_j(M') < \lambda_j(M) + \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{12}$$

Найдутся натуральные числа $b_1, b_2, \ldots, b_{2s}$ и последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$ такие, что $a_{i+t} = b_{t+1}$, $t = 0, 1, \ldots, 2s-1$, $r = 1, 2, \ldots$ Образуем последовательности

$$M^{(r)} = \{a_i^{(r)} = a_i,\ i \leqslant i_r,\ a_i^{(r)} = a_{i+i_1-i_r},\ i > i_r\}. \tag{13}$$

Для них ввиду (12) и (13) $\lambda_i(M^{(r)}) < \lambda_i(M_1) + \frac{\varepsilon_1}{2}$, $i \leqslant i_r + s$.

Ввиду (12)

$$\lambda_i(M^{(r)}) < \lambda(M_1),\ i > i_r + s.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для малых i. Если предположить, что M_1 непериодичная как справа, так и слева, то из теоремы 1 следовало бы теперь, что $\lambda(M_1) \in \{\lambda(\mathscr{L})\}$.

Наконец, условие 4 также выполняется, так как в противном случае из теоремы 1 следовало бы, что $\lambda(M_1) \in \{\lambda(\mathscr{L})\}$.

Условия 1—4 также и достаточны для того, чтобы $\lambda(M_1) \in \{\lambda(\mathscr{L})\}$. В самом деле, если $\lambda(M_1) = \lambda(\mathscr{L})$ при некотором $\mathscr{L}$, то в $\mathscr{L}$ встретились бы сколь угодно длинные отрезки последовательностей $M^{(r)}$, а это противоречит условиям 1—4.

Все теоремы настоящей работы сформулированы лишь для $\lambda(M) \in (\alpha, \beta)$. Множество, для которого справедливы теоремы 1—3, может быть существенно расширено.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Фрейман, Матем. заметки, 3, № 2, 195 (1968). [2] П. Г. Когония, Тр. Тбилисск. матем. инст., 29, 15 (1963).

* Последовательность M всегда можно заменить на M', для которой $b_i = a_{-i}$, и мы не будем различать две такие последовательности.