Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

Р. В. ДУДУЧАВА

О СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЁЛЬДЕРА С ВЕСОМ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 22 VII 1969)

В настоящем сообщении изложены некоторые дополнения к известным результатам Н. И. Мусхелишвили [1] о сингулярных интегральных уравнениях с кусочно-гёльдеровыми коэффициентами. В доказательствах почти всех приводимых ниже теорем используются методы, предложенные И. Ц. Гохбергом и Н. Я. Крупником в [2–4].

1. Пусть Γ — простая гладкая замкнутая ориентированная кривая на плоскости, окружающая точку $z=0$. Пусть $c_1,\ldots,c_n$ — некоторые точки на Γ и μ — действительное число, $0<\mu\leqslant 1$.

Через $H_\mu(\Gamma)$ обозначим банахово пространство функций, заданных на Γ, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ и с нормой

$$\|\varphi\|_H=\sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\mu}+\max|\varphi(t)|\quad (t,\,t_1,\,t_2\in\Gamma,\ t_1\neq t_2).$$

Через $H_\mu^0(\Gamma,c,\ldots,c_n)$ обозначим подпространство пространства $H_\mu(\Gamma)$, состоящее из всех функций $\varphi(t)$, для которых $\varphi(c_j)=0$ $(j=1,\ldots,n)$.

Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — некоторые комплексные числа. Рассмотрим функцию

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-c_k)^{\alpha_k}. \tag{1}$$

Через $H_\mu^0(\Gamma,\rho)$ обозначим множество всех функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям $\varphi(t)\cdot\rho(t)\in H_\mu^0$ $(\Gamma,c_1,\ldots,c_n)$. Легко видеть, что класс $H_\mu^0(\Gamma,\rho)$, снабженный нормой $\|\varphi\|_\rho=\|\varphi\cdot\rho\|_H$, является банаховым пространством.

Используя известные методы оценки сингулярных операторов (см. [1], § 25), можно показать, что если числа $\mu,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ удовлетворяют условиям

$$0<\mu<1,\quad \mu<\operatorname{Re}\alpha_k<\mu+1\quad (k=1,\ldots,n), \tag{2}$$

то оператор S сингулярного интегрирования

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\quad (t\in\Gamma)$$

является линейным ограниченным оператором в пространстве $H_\mu^0(\Gamma,\rho)$.

Существенную роль в дальнейшем играет следующая *

Лемма. *Если $a(t)\in H_\mu(\Gamma)$, а числа $\mu,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ удовлетворяют соотношениям* (2), *то оператор $T=aS-SaI$ (I — единичный оператор) является вполне непрерывным оператором в пространстве $H_\mu^0(\Gamma,\rho)$, где $\rho(t)$ определяется равенством* (1).

Теорема 1. *Пусть $c(t)$ и $d(t)\in H_\mu(\Gamma)$; числа $\mu,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ удовлетворяют соотношениям* (2) *и $\rho(t)$ определена равенством* (1).

Для того чтобы оператор

$$A=cI+dS\quad (A=cI+SdI)$$

*был Φ_+- или Φ_--оператором ** в пространстве $H_\mu^0(\Gamma,\rho)$, необходимо и до-*

* Для пространств Гёльдера без веса эта лемма установлена в [5], § 6.

** Определение $\Phi_\pm$- и Φ-операторов см. в [6].

статочно, чтобы выполнялись условия $c(t)+d(t)\neq 0$, $c(t)-d(t)\neq 0$ $(t\in\Gamma)$. *Если эти условия выполнены и* $\varkappa=(1/2\pi)\,[\arg((c+d)/(c-d))]_\Gamma$, *то:*

1) *при* $\varkappa>0$ *оператор* A *обратим слева в* $H_\mu{}^0(\Gamma,\rho)$ *и* $\dim\operatorname{coker}A=\varkappa$;

2) *при* $\varkappa<0$ *оператор* A *обратим справа в* $H_\mu{}^0(\Gamma,\rho)$ *и* $\dim\ker A=-\varkappa$;

3) *при* $\varkappa=0$ *оператор* A *обратим в* $H_\mu{}^0(\Gamma,\rho)$.

Для случая пространств Гёльдера без веса теорема 1 установлена в (7). Отметим, что для установления сформулированной теоремы понадобился новый метод доказательства необходимости ее условий.

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что если функции $c(t)$ и $d(t)\in H_\mu(\Gamma)$, то спектр оператора A не зависит от выбора чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, удовлетворяющих соотношениям (2). Это предложение перестает быть верным, если коэффициенты $c(t)$ и $d(t)$ имеют разрывы первого рода в некоторых фиксированных точках на Γ (см. теорему 2).

2. Пусть x и ζ — две точки комплексной плоскости; μ — действительное, а α — комплексное число, причем $0<\mu<1$, $\mu<\operatorname{Re}\alpha<\mu+1$. Через $\nu_{\mu,\alpha}(z,\zeta)$ обозначим дугу окружности, соединяющую точки z и ζ и обладающую следующими свойствами: (I) в случае $\operatorname{Re}\alpha-\mu<{}^1/_2$ из внутренних точек дуги $\nu_{\mu,\alpha}(z,\zeta)$ отрезок, соединяющий точки z и ζ, виден под углом $\theta=(\operatorname{Re}\alpha-\mu)2\pi$ и направление от точки z и ζ вдоль дуги $\nu_{\mu,\alpha}(z,\zeta)$ идет против часовой стрелки; (II) в случае $\operatorname{Re}\alpha-\mu>{}^1/_2$ положим $\nu_{\mu,\alpha}(z,\zeta)=\nu_{\mu,\beta}(\zeta,z)$, где $\beta=1+2\mu-\alpha$; (III) в случае $\operatorname{Re}\alpha-\mu={}^1/_2$ через $\nu_{\mu,\alpha}(z,\zeta)$ обозначим отрезок, соединяющий точки z и ζ.

Через $H_\mu(\Gamma,c_1,\ldots,c_n)$ обозначим множество функций, непрерывных слева на Γ, удовлетворяющих всюду условию Гёльдера с показателем μ, за исключением, быть может, точек $c_1,\ldots,c_n$, в которых они могут иметь разрывы первого рода.

Пусть $a(t)\in H_\mu(\Gamma,c_1,\ldots,c_n)$ и $\omega=(\mu,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ обозначает вектор с координатами, удовлетворяющими соотношениям (2). Сопоставим функции $a(t)$ и вектору ω непрерывную, замкнутую, естественным образом ориентированную кривую $V_\omega(a)$, полученную добавлением n дуг $\nu_{\mu,\alpha_k}(a(c_k),a(c_k+0))$ * к множеству значений функции $a(t)$. Функцию $a(t)$ назовем ω-неособенной, если $0\overline{\in}V_\omega(a)$. Индексом (или ω-индексом) ω-неособенной функции назовем число оборотов кривой $V_\omega(a)$ вокруг точки $z=0$

$$\operatorname{ind}_\omega a=\frac{1}{2\pi}\,[\arg V_\omega(a)]_\Gamma.$$

Теорема 2. *Пусть* $c(t)$ *и* $d(t)\in H_\mu(\Gamma,c_1,\ldots,c_n)$; *вектор* $\omega=(\mu,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *удовлетворяет соотношениям* (2) *и* $\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-c_k)^{\alpha_k}$.

Для того чтобы оператор

$$A=cI+dS\qquad(A=cI+SdI)\tag{3}$$

был Φ_+- *или* Φ_--*оператором в пространстве* $H_\mu{}^0(\Gamma,\rho)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

I. $\inf|b(t)|>0$ $(t\in\Gamma)$.

II. *Функция* $a(t)/b(t)$ *является* ω-*неособенной, где* $a(t)=c(t)+d(t)$ *и* $b(t)=c(t)-d(t)$.

Если условия I *и* II *выполнены и* $\varkappa=\operatorname{ind}_\omega[a/b]$, *то:*

1) *при* $\varkappa>0$ *оператор* A *обратим слева в* $H_\mu{}^0(\Gamma,\rho)$ *и* $\dim\operatorname{coker}A=\varkappa$;

2) *при* $\varkappa<0$ *оператор* A *обратим справа в* $H_\mu{}^0(\Gamma,\rho)$ *и* $\dim\ker A=-\varkappa$;

3) *при* $\varkappa=0$ *оператор* A *обратим в* $H_\mu{}^0(\Gamma,\rho)$.

* Ориентация кривой $V_\omega(a)$ производится так, чтобы в промежутках непрерывности функции $a(t)$ движение по кривой $V_\omega(a)$ определялось движением переменной t на Γ в положительном направлении, а вдоль дуг $\nu_{\mu,\alpha_k}(a(c_k),a(c_k+0))$ — от точки $a(c_k)$ к точке $a(c_k+0)$.

Без труда проверяется, что условия I *и* II *эквивалентны следующим:*

I′. $\inf|a(t)| > 0$ *и* $\inf|b(t)| > 0$ $(t \in \Gamma)$.

II′. $\beta_k \neq \operatorname{Re}\alpha_k - \mu$, *где* $\beta_k = (1/2\pi)\arg[a(c_k)b(c_k+0)/a(c_k+0)b(c_k)]$.

Пусть выполнены условия I и II. Рассмотрим функцию $\psi(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} t^{\gamma_k}$, где числа $\gamma_k = (1/2\pi)\ln[a(c_k)b(c_k+0)/a(c_k+0)b(c_k)]$ выбраны так, чтобы $\operatorname{Re}\alpha_k - \mu > \operatorname{Re}\gamma_k > \operatorname{Re}\alpha_k - \mu - 1$. Последнее возможно в силу условия II′. Условимся также, что точкой разрыва для функции t^{γ_k} (если γ_k не целое число) является точка c_k. Легко видеть, что функция $g(t) = a(t)/b(t)\psi(t)$ принадлежит классу $H_\mu(\Gamma)$ и $g(t) \neq 0 (t \in \Gamma)$. Если

$$g_\pm(t) = \exp[{}^1/_2((I \pm S)t^{-\varkappa}g)(t)],$$

где $\varkappa = (1/2\pi)[\arg g(t)]_\Gamma$, то один из обратных операторов к оператору $A = cI + dS$ (левый обратный при $\varkappa \geqslant 0$, правый обратный при $\varkappa \leqslant 0$) запишется в виде

$$A^{-1} = g_+^{-1}(t)\left[\frac{1+g(t)}{2}I + \frac{1-g(t)}{2}S\right] \times$$
$$\times \psi_+^{-1}(t)\left[\frac{t^{-\varkappa}+\psi(t)}{2}I + \frac{t^{-\varkappa}-\psi(t)}{2}S\right]b^{-1}(t)g_-^{-1}(t)\psi_-^{-1}(t)I,$$

где

$$\psi_+(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-c_k)^{\alpha_k}, \quad \psi_-(t) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t}{t-c_k}\right)^{\alpha_k}.$$

Теорема 2 в своей достаточной части является уточнением некоторых результатов Н. И. Мусхелишвили (см. ([1]), § 97). Из теоремы 2 легко выводится следующая теорема о спектре оператора A, определенного равенством (3).

Теорема 3. *Пусть* $c(t)$ *и* $d(t) \in H_\mu(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$, *вектор* $\omega = (\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *удовлетворяет соотношениям* (2) *и* $\rho(t) = \prod\limits_{k=1}^{k}(t-c_k)^{\alpha_k}$.

Тогда дополнение $C\Phi_A$ *к* Φ-*множеству* оператора* A *в пространстве* $H_\mu{}^0(\Gamma, \rho)$ *состоит из объединения множеств значений функций* $a(t)$ *и* $b(t)$ *множества комплексных чисел* λ, *удовлетворяющих, по крайней мере, при одной паре чисел* k *и* x $(k = 1, \ldots, n;\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$ *уравнению*

$$[a(c_k) - \lambda]\frac{\sin\theta_k(1-x)}{\sin\theta_k}e^{ix\theta_k} + [a(c_k+0) - \lambda]\frac{\sin\theta_k x}{\sin\theta_k}e^{i\theta_k(x-1)} = 0,$$

где $\theta_k = \pi - 2\pi(\operatorname{Re}\alpha_k - \mu)$.

Спектр оператора A *в* $H_\mu{}^0(\Gamma, \varphi)$ *состоит из всех точек* $C\Phi_A$ *и точек* $\lambda \in \Phi_A$, *для которых* $\operatorname{ind}_\omega[(a-\lambda)/(b-\lambda)] \neq 0$.

3. Через $H_\mu{}^m(\Gamma, \rho)$ обозначим пространство вектор-функций $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ с компонентами $\psi_j \in H_\mu{}^0(\Gamma, \rho)$. Рассмотрим в пространстве $H_\mu{}^m(\Gamma, \rho)$ матричные сингулярные интегральные операторы

$$(K\Psi)(t) = \mathcal{G}(t)\Psi(t) + \mathcal{D}(t)(S\Psi)(t),$$
$$(L\Psi)(t) = \mathcal{G}(t)\Psi(t) + (S\mathcal{D}\Psi)(t),$$

где $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ — матрицы-функции порядка m, каждый элемент которых принадлежит множеству $H_\mu{}^m(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ (т. е. $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{D}(t) \in H_\mu{}^m(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$), а S — матричный оператор сингулярного интегрирования.

Если $\mathcal{G}(t) = \|g_{ij}\|_{ij=1}^{m}$, то сопоставим ей непрерывную матрицу-функцию $V_\omega(\mathcal{G}) = \|V_\omega(g_{ij})\|_{i,j=1}^{m}$, где $\omega = (\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор, координаты которого удовлетворяют соотношениям (2).

* Φ-множеством оператора A называется множество тех точек λ комплексной плоскости, для которых оператор $A - \lambda I$ является Φ-оператором.

Матрицу-функцию $\mathscr{G}(t) \in H_\mu{}^m(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ назовем ω-неособенной, если функция $\det V_\omega(\mathscr{G})$ не обращается в нуль.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{G}(t)$ и $\mathscr{D}(t) \in H_\mu{}^m(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$. Для того чтобы оператор $K = \mathscr{G}I + \mathscr{D}S$ $(L = \mathscr{G}I + S\mathscr{D}I)$ был Φ-оператором в пространстве $H_\mu{}^m(\Gamma, \rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

I. $\inf|\det \mathscr{B}(t)| > 0$ $(t \in \Gamma)$.

II. *Матрица $\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}$ $(\mathscr{A}\mathscr{B}^{-1})$ является ω-неособенной, где $\mathscr{A}(t) = \mathscr{G}(t) + \mathscr{D}(t)$ и $\mathscr{B}(t) = \mathscr{G}(t) - \mathscr{D}(t)$.*

Если условия I *и* II *выполнены, то*

$$\operatorname{ind} K = \operatorname{ind} \det V_\omega(\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}), \qquad (\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} \det V_\omega(\mathscr{A}\mathscr{B}^{-1}))\ ^*.$$

Без труда проверяется, что условия I *и* II *эквивалентны следующим:*

I′. $\inf|\det \mathscr{A}(t)| > 0, \inf|\det \mathscr{B}(t)| > 0$ $(t \in \Gamma)$.

II′. *Для каждого собственного значения $\lambda_j{}^{(k)}$ матрицы*

$$\mathscr{A}^{-1}(c_k+0)\mathscr{B}(c_k+0)\mathscr{B}^{-1}(c_k)\mathscr{A}(c_k)$$
$$(\mathscr{B}(c_k+0)\mathscr{A}^{-1}(c_k+0)\mathscr{A}(c_k)\mathscr{B}^{-1}(c_k))$$

выполняется соотношение $\operatorname{Re}\alpha_k \neq \mu + \beta_j{}^{(k)}$ $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$, *где* $\beta_i^{(k)} = (1/2\pi)\arg \lambda_j^{(k)},\ 0 \leqslant \beta_j^{(k)} < 1$.

4. Все приведенные результаты допускают обобщение на случай, когда Γ состоит из конечного числа замкнутых гладких контуров, и на случай, когда Γ состоит из конечного числа гладких простых замкнутых и разомкнутых дуг. При этом используется метод, изложенный в ([2]).

Проиллюстрируем результаты второго пункта для случая, когда $A = S$ (т. е. $c(t) \equiv 0$ и $d(t) \equiv 1$) и Γ — контур, состоящий из p простых гладких ориентированных разомкнутых дуг. Через $c_1, \ldots, c_{2p}$ обозначим концы этих дуг, а через $\rho(t)$ — вес, определенный равенством $\rho(t) = \prod_{k=1}^{2p}(t - c_k)^{\alpha_k}$, где $0 < \mu < 1$, $\mu < \operatorname{Re}\alpha_k < \mu + 1$ $(k = 1, \ldots, 2p)$.

Теорема 5. *Для того чтобы оператор S был Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $H_\mu{}^0(\Gamma, \rho)$, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{Re}\alpha_k - \mu \neq {}^1/_2$ *для всех* $k = 1, \ldots, 2p$.

Пусть $\operatorname{Re}\alpha_k - \mu \neq {}^1/_2$ *для всех k и q — число точек c_k, в которых* $\operatorname{Re}\alpha_k - \mu > {}^1/_2$.

Тогда:

1) *при $p > q$ оператор S обратим справа в $H_\mu{}^0(\Gamma, \rho)$ и* $\dim\ker S = p - q$;

2) *при $p < q$ оператор S обратим слева в $H_\mu{}^0(\Gamma, \rho)$ и* $\dim\operatorname{coker} S = q - p$;

3) *при $p = q$ оператор S обратим в $H_\mu{}^0(\Gamma, \rho)$.*

Дополнение $C\Phi_A$ к Φ-множеству оператора S представляет собой объединение $2p$ дуг Z окружностей, каждая из которых соединяет точки -1 и 1 и проходит через одну из соответствующих точек $i\operatorname{ctg}[\pi(\operatorname{Re}\alpha_k - \mu)]$ *или* $-i\operatorname{ctg}[\pi(\operatorname{Re}\alpha_k - \mu)]$ *в зависимости от того, является ли c_k концом или началом соответствующей дуги.*

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев
Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
4 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [2] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, ДАН, 185, № 4 (1969). [3] I. Gokhberg, N. Krupnik, Studia Math., 31, 347 (1968). [4] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, ДАН, 186, № 5 (1969). [5] М. С. Будяну, И. Ц. Гохберг, Матем. исследов., Кишинев, 3, в. 3 (1968). [6] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, 12, в. 2 (74) (1957). [7] И. Ц. Гохберг, М. К. Замбицкий, Укр. матем. журн., 18, в. 1 (1966).

* $\operatorname{ind} K = \dim\ker K - \dim\operatorname{coker} K$.