Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 517.521 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ИЛЬИН

ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ И СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА БЕЛЬТРАМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 8 VII 1969)

В работе ([1]) было введено понятие фундаментальной системы функций (ф.с.ф.) оператора Бельтрами B в подобласти Ω (или на римановом подмногообразии Ω) и был установлен ряд важных свойств фундаментальных функций. В настоящей работе, опираясь на упомянутые свойства, мы устанавливаем в определенном смысле окончательные условия локализации и равномерной сходимости рядов Фурье по произвольной ф.с.ф. оператора Бельтрами.

Главным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Основная теорема. *Пусть $N \geqslant 2$; G — произвольная N-мерная область; $\{u_k(x)\}$ — произвольная ф.с.ф. оператора Бельтрами B в какой угодно ее подобласти* Ω, причем для фундаментальных чисел $\{\lambda_k\}$ допускаются конечные точки сгущения. Пусть коэффициенты g^{ik} оператора Бельтрами B принадлежат классу $C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(2[N/4]+1)}(\Omega)$. Тогда, если функция $f(x)$ финитина в области Ω, принадлежит в этой области классу $W_2^{(N-1)/2}(\Omega)$, а в некоторой содержащейся в Ω области D** принадлежит классу $W_p^{\alpha}(D)$ при $\alpha = (N-1)/2$, $p > 2N/(N-1)$ для нечетного N и $\alpha > (N-1)/2$, $p = 2N/(N-1)$ для четного N, то равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} f_k u_k(x) = f(x). \tag{1}$$

*(Здесь f_k обозначает коэффициент Фурье $\int\limits_{\Omega} f(x)\, u_k(x) \sqrt{g(x)}\, dx$ функции $f(x)$ по системе $\{u_k(x)\}$***.*

Если у фундаментальных чисел $\{\lambda_k\}$ отсутствуют конечные точки сгущения, то вместо (1) можно писать

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k u_k(x) = f(x),$$

предполагая при этом, что фундаментальные числа занумерованы в порядке возрастания.

Замечание. Вместо областей G и Ω при определении ф.с.ф. можно брать замкнутое N-мерное риманово многообразие G и вложенное в него достаточно гладкое компактное риманово N-мерное многообразие Ω, на котором определен оператор Лапласа — Бельтрами. При этом сходимость (1) будет равномерной на любом вложенном в Ω римановом подмногообразии Ω', расстояние всех точек которого от границы Ω превосходит положитель-

* Конечно, подобласть Ω может совпадать со всей областью G.
** Область D может совпадать с Ω.
*** Напомним, что система $\{u_k(x)\}$ ортонормирована с весом $\sqrt{g(x)}$ (см. ([1])).

ное число (а если $G \equiv \Omega$ является компактным многообразием без края, то сходимость (1) будет равномерной на всем многообразии Ω).

Соединяя сформулированную основную теорему с двумя основными теоремами нашей работы ([2]), мы приходим к заключению, что для произвольной ф.с.ф. оператора Бельтрами в подобласти Ω нами установлены следующие результаты.

1) Для произвольной N-мерной области установлены окончательные в классах С. Л. Соболева W_2^α условия локализации ряда Фурье финитной функции $f(x)$ (доказано, что при $\alpha \geqslant (N-1)/2$ для ряда Фурье справедлив принцип локализации; вместе с тем при $\alpha < (N-1)/2$ этот принцип не имеет места).

2) Для произвольной области любого нечетного числа $N \geqslant 3$ измерений установлены окончательные в классах Гёльдера $C^{(n,\,\alpha)}$ условия локализации и равномерной сходимости ряда Фурье финитной функции $f(x)$ (доказано, что принадлежность $f(x)$ классу $C^{((N-3)/2,\,\alpha)}$ при $\alpha = 1$ обеспечивает равномерную в подобласти сходимость ряда Фурье; вместе с тем принадлежность $f(x)$ тому же классу при $\alpha < 1$ не обеспечивает даже локализации ряда Фурье).

3) Для произвольной области любого четного числа N измерений установлены близкие к окончательным в классах Гёльдера $C^{(n,\,\alpha)}$ условия локализации и равномерной сходимости ряда Фурье финитной функции $f(x)$ (доказано, что принадлежность $f(x)$ классу $C^{((N-2)/2,\,\alpha)}$ при $\alpha > {}^1/_2$ обеспечивает равномерную в подобласти сходимость ряда Фурье; вместе с тем принадлежность $f(x)$ тому же классу при $\alpha < {}^1/_2$ не обеспечивает даже локализации ряда Фурье).

Следует отметить, что условия локализации и равномерной сходимости, полученные нами в данной работе для произвольной ф.с.ф. оператора Бельтрами и в работе ([2]) для произвольной ф.с.ф. оператора Лапласа, являются новыми (и в определенном смысле окончательными) даже для кратных тригонометрических рядов Фурье и рядов Фурье по собственным функциям конкретных краевых задач, хотя вопросам сходимости и локализации указанных рядов были посвящены исследования ряда математиков (Л. Тонелли, Э. Ч. Титчмарша, С. Бохнера, С. Минакшисундарама, Е. Штейна, Б. М. Левитана, О. А. Ладыженской и др.).

Автор приносит глубокую благодарность А. Н. Тихонову, беседы с которым стимулировали появление этой работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Арсеньев, В. А. Ильин, ДАН, **190**, № 6 (1970). [2] В. А. Ильин, УМН, **23**, № 2, 61 (1968).