Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 5

УДК 517.91 **МАТЕМАТИКА**

Ю. И. ГИЛЬДЕРМАН

О ТРАЕКТОРИЯХ СИСТЕМ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ВИДА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 IX 1969)

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \min_k b_{jk} x_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

К системам подобного рода можно прийти, по крайней мере, из двух пунктов. Прежде всего такие системы описывают процессы, для которых существенно наличие так называемого «узкого места». Этот вопрос подробно обсуждается в ([1]). Кроме этого, подобные системы (как системы для двойственных переменных) возникают в некоторых задачах оптимального управления. Для частного случая системы (1), когда a_{ij} — символ Кронекера, этот вопрос рассматривается в ([2]).

В настоящем сообщении мы рассмотрим некоторые свойства системы (1), ограничившись случаем двух уравнений.

Систему (1) при $n = 2$ можно привести к виду

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{m} [a_{ij}^{(1)} \min_k b_{jk} x_k + a_{ij}^{(2)} \max_k b_{jk} x_k], \quad i, k = 1, 2, \tag{2}$$

где $b_{j2} \geqslant 0$, а b_{j1} и $a_{ij}^{(k)}$ — любые действительные числа. Мы будем предполагать, что b_{j1} и b_{j2} ни при каком j одновременно в нуль не обращаются.

Если, в частности, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}$, то система (2) превращается в линейную однородную систему с постоянными коэффициентами. В общем случае справедлива

Теорема 1. *Пучок прямых $b_{j2}x_2 = b_{j1}x_1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, делит плоскость x_1ox_2 на $2m$ углов, в каждом из которых система* (2) *превращается в линейную однородную систему с постоянными коэффициентами.*

Следствие 1. *Лучи, выходящие из начала координат, являются изоклинами для траекторий системы* (2).

Следствие 2. *Начало координат при любых матрицах $\|a_{ij}^{(1)}\|$, $\|a_{ij}^{(2)}\|$, $\|b_{ij}\|$ является стационарным решением системы* (2). *Другие стационарные решения, если они есть, заполняют целиком либо некоторые из $2m$ углов, либо лучи, выходящие из начала координат.*

Следствие 3. *Если точка (x_1^0, x_2^0) расположена вне указанных в следствии 2 множеств особых точек, то решение задачи Коши для системы* (2) *с начальными данными x_1^0, x_2^0 может быть получено в явном виде без квадратур.*

Заметим, что существование и единственность такого решения следует из того, что правые части системы (2) удовлетворяют условию Липшица по обеим переменным.

Предположим теперь, что, кроме начала координат, система (2) не имеет стационарных решений. Для этого необходимо и достаточно, чтобы для любого единичного вектора h_1, h_2 нашлось хотя бы одно значение $i = 1, 2$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{m} (a_{ij}^{(1)} \min_k b_{jk} h_k + a_{ij}^{(2)} \max_k b_{jk} h_k) \neq 0.$$

Рассмотрим вопрос о поведении траекторий в окрестности начала координат в этом случае.

Предложение 1. *Пусть A_k и A_{k+1} — матрицы системы* (2) *соответственно в k-м и $(k+1)$-м углу. Тогда справедливо равенство*

$$A_{k+1} = A_k + \tilde{A},$$

где $\tilde{A}$ — матрица вида

$$\|-\alpha_i \ \ \beta\alpha_i\|.$$

Предложение 2. *Матрица системы* (2) *в k-м углу однозначно определяется, если заданы матрицы в $(k-1)$-м и $(k+1)$-м углах.*

Пусть теперь имеются две системы

$$\dot{X} = AX, \quad A = \|a_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2; \tag{3}$$

$$\dot{X} = (A + \tilde{A})X, \quad \tilde{A} = \|-\alpha_i \ \ \beta\alpha_i\|. \tag{4}$$

Матрицу A (или $A + \tilde{A}$) назовем специально вырожденной, если она нулевого ранга или если отношение элементов второго столбца к элементам первого столбца равно $-\beta$.

Предложение 3. *Если одна из матриц A или $A + \tilde{A}$ специально вырождена, то и другая из этих матриц специально вырождена.*

Предложение 4. *Если A специально вырождена, то, кроме начала координат, система* (3) *имеет бесконечно много стационарных решений.*

Предложение 5. *Если $\gamma = a_{21}\beta^2 - \beta(a_{11} - a_{22}) - a_{12} \neq 0$, то матрица A не является специально вырожденной.*

Лемма 1. *Если $\gamma \neq 0$, то, какой бы ни была матрица A, точку (α_1, α_2) в плоскости $\alpha_1 o \alpha_2$ можно выбрать так, что начало координат для системы* (4) *будет особой точкой любого заданного наперед типа. Исключительным направлениям* (*в случае узла и седла*) *выбором (α_1, α_2) можно придать любой заданный угловой коэффициент, кроме $1/\beta$. Наконец, (α_1, α_2) можно выбрать так, что тректории системы* (4) *будут параллельными прямыми.*

Заметим еще, что седло и узел можно получить, выбирая α_1, α_2 желаемых знаков. Это важно при описании необратимых процессов.

Лемма 2. *Если $\gamma = 0$ и матрица A не специально вырождена, то матрица $A + \tilde{A}$, так же как и матрица A, имеет только действительные собственные числа. При этом одно из исключительных направлений для обеих систем* (3) *и* (4) *имеет угловой коэффициент, равный $1/\beta$.*

Следствием высказанных предложений и лемм является

Теорема 2. *Пусть плоскость $x_1 o x_2$ разбита пучком прямых, проходящих через начало координат, на $2m$ углов. Пусть в каждом из $2m - 1$ углов задан тип особой точки* (0, 0) *так, что граничный луч для траекторий соседних углов, им разграниченных, одновременно является или не является исключительным направлением. Тогда найдется такая система* (2), *траектории которой будут себя вести в соответствии с заданной комбинацией типов.*

Теорема 2 дает возможность конструировать системы (2) с особыми точками разнообразных типов, как, например, кратное седло, кратный узел, кратный седло-узел и т. п. Индексы этих кратных точек по модулю больше единицы.

Справедливо утверждение, обратное теореме 2: указанные в ее условии сочетания траекторий линейных систем исчерпывают все возможности расположения траекторий систем (2) в окрестности начала координат (при условии, что (0, 0) — изолированная особая точка).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
17 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. И. Гильдерман, К. Н. Кудрина, И. А. Полетаев, Сборн. Исследования по кибернетике, 1969. [2] А. Н. Ляпунов, Кибернетика, 1, 89 (1969).