Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 518:517.948 *МАТЕМАТИКА*

Ю. И. ЛЮБИЧ, Г. Д. МАЙСТРОВСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 8 VII 1969)

Пусть $\varphi(x)$ — функционал в вещественном гильбертовом пространстве, заданный в некоторой выпуклой области W. Предположим, что $\varphi(x)$ обладает в W производной $F(x)$ и

$$m\|y\|^2 \leqslant (F(x+y) - Fx,\ y) \leqslant M\|y\|^2, \tag{1}$$

где $M \geqslant m > 0$ — константы. Точку минимума функционала обозначим через x^0 и положим $\Delta(x) = \varphi(x) - \varphi(x^0)$. Оператор Γ: $W \to W$ назовем релаксационным *, если $\varphi(\Gamma x) \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in W$.

Рассмотрим процесс вида

$$x_{k+1} = \Gamma_k x_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где $\{\Gamma_k\}$ — последовательность релаксационных операторов. Нас будет интересовать поведение возмущенного процесса

$$z_{k+1} = \Gamma_k z_k + v_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $\{v_k\}$ — шум. Под сходимостью процесса будем понимать его сходимость к точке x^0, что в силу (1) эквивалентно

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(x_k) = 0.$$

Будем говорить, что имеет место **линейная сходимость**, если

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\Delta(z_{k+1})}{\Delta(z_k)} < 1.$$

Всюду в дальнейшем семейство операторов $\{\Gamma_k\}$ предполагается **равностепенно релаксационным** в том смысле, что

$$S(\varepsilon) \equiv \sup_k \sup_{\Delta(x)\geqslant\varepsilon} \frac{\Delta(\Gamma_k x)}{\Delta(x)} < 1 \quad (\varepsilon > 0) \tag{4}$$

(это условие вводится нами только для упрощения формулировок). Процесс (2) является **релаксационным**, т. е. $\varphi(x_{k+1}) \leqslant \varphi(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Процесс (3) уже может оказаться не релаксационным.

Рассмотрим луч $\Gamma_k z_k + \lambda v_k$ $(\lambda \geqslant 0)$ и обозначим через $\tilde{z}_k$ точку его пересечения с поверхностью уровня $\varphi(x) = \varphi(x_k)$. Положим $\tilde{v}_k = \tilde{z}_k - \Gamma_k z_k$. Величину возмущения v_k будем характеризовать отношением

$$\rho_k = \|v_k\| : \|\tilde{v}_k\|.$$

Релаксационность процесса (3), очевидно, эквивалентна неравенству $\rho_k \leqslant 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1. *Пусть возмущенный процесс — релаксационный. Тогда для его сходимости необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho_k) = \infty. \tag{5}$$

---
* Относительно функционала φ.

Для доказательства теоремы 1 заметим, что из формулы Тейлора вытекает

$$\Delta(z_{k+1}) - \Delta(z_k) = -(1-\rho_k)\{\Delta(z_k) - \Delta(\Gamma_k z_k) + a_k\rho_k\|\tilde{v}_k\|^2\}, \qquad (6)$$

где $^1/_2 m \leqslant a_k \leqslant {}^1/_2 M$. Если процесс не сходится, то в силу (4) существует $\mu < 1$ такое, что $\Delta(\Gamma_k z_k) \leqslant \mu\Delta(z_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому

$$\Delta(z_{k+1}) - \Delta(z_k) \leqslant -(1-\rho_k)(1-\mu)\Delta(z_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \quad (7)$$

откуда при выполнении (5) следует сходимость. Противоречие доказывает достаточность условия (5). С другой стороны,

$$\|\tilde{v}_k\|^2 \leqslant 8m^{-1}\Delta(z_k), \qquad (8)$$

откуда

$$\Delta(z_{k+1}) - \Delta(z_k) \geqslant -(1-\rho_k)(1+4h)\Delta(z_k), \qquad (9)$$

где $h = Mm^{-1}$ — мера обусловленности. Из (7) следует необходимость условия (5).

Теорема 2. *Пусть существует такая константа* $\mu < 1$, что

$$\Delta(\Gamma_k x) \leqslant \mu\Delta(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (10)$$

Тогда для линейной сходимости возмущенного процесса необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \rho_k < 1. \qquad (11)$$

Этот результат непосредственно вытекает из оценок (7), (9). Отметим, что условие (11) в качестве достаточного можно заменить более эффективным условием

$$\|v_k\| \leqslant \frac{1-\sqrt{\mu}}{M}\|Fz_k\| \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

До сих пор мы измеряли уровень шума в терминах относительной погрешности. Рассмотрим теперь вопрос о влиянии шума, малого в смысле абсолютной погрешности. При этом релаксационность возмущенного процесса уже можно не предполагать.

Будем говорить, что процесс $\{z_k\}$ сходится с точностью до ε, если

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \Delta(z_k) \leqslant \varepsilon.$$

Положим

$$\delta_0(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/2M}\,(1-\sqrt{S(\varepsilon/4)}), \quad \delta_1(\varepsilon) = 2\sqrt{2\varepsilon/m}.$$

Теорема 3. *Для того чтобы возмущенный процесс сходился с точностью до* ε, *необходимо, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \|v_k\| \leqslant \delta_1(\varepsilon),$$

и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \|v_k\| < \delta_0(\varepsilon).$$

Необходимость вытекает из оценки (8). Для доказательства достаточности возьмем такое $\rho < 1$, что

$$\|v_k\| \leqslant \rho\delta_0(\varepsilon), \qquad (12)$$

начиная с $k = k_0$. Тогда можно оценить ρ_k. Именно, если $\Delta(z_k) > {}^1/_4\varepsilon$, то $\rho_k \leqslant \rho$. Поэтому из теоремы 1 следует, что $\Delta(z_k) \leqslant \varepsilon/4$ для некоторого $n \geqslant k_0$. В силу (12) и неравенства

$$\Delta(z_{k+1}) \leqslant \Delta(z_k) + \sqrt{2M\Delta(z_k)}\,\|v_k\| + {}^1/_2 M\|v_k\|^2$$

* По-прежнему в предположении, что он релаксационный.

имеет место импликация

$$\Delta(z_k) \leqslant \varepsilon/4 \Rightarrow \Delta(z_{k+1}) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\Delta(z_k) \leqslant \varepsilon(k \geqslant n)$.

Замечание. При условии (10) можно положить

$$\delta_0(\varepsilon) = (1-\sqrt{\mu})\sqrt{2\varepsilon/M}, \quad \delta_1(\varepsilon) = (1+\sqrt{\mu})\sqrt{2\varepsilon/m}.$$

Таким образом, результирующая погрешность процесса имеет точно тот же порядок, что и погрешность каждого шага.

Следствие 1. *При выполнении условия* (10) *существуют константы* c_0, c_1 $(0 < c_1 < c_0)$ *такие, что*

$$c_1 \overline{\lim_{k\to\infty}} \|v_k\| \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \|x_k - x^0\| \leqslant c_0 \overline{\lim_{k\to\infty}} \|v_k\|.$$

Можно положить

$$c_1 = 1/(\sqrt{\mu}+1)\sqrt{h}, \quad c_0 = \sqrt{h}/(1-\sqrt{\mu}).$$

Следствие 2. *Для сходимости возмущенного процесса необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{k\to\infty} v_k = 0,$$

Полученные общие теоремы могут быть применены к исследованию устойчивости конкретных процессов. Устойчивость различных конкретных процессов изучалась в работах ([1–10]).

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Физико-технический институт низких температур Академии наук УССР
Харьков

Поступило
27 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Urabe, J. Sci. Hiros. Univ., **A19**, № 3, 479 (1956). [2] И. М. Derendяев, Уч. зап. Пермск. унив., 16, № 3, 43 (1958). [3] M. Urabe, J. Sci. Hiros. Univ., **A26**, № 2, 77 (1962). [4] M. A. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, ДАН, **141**, 785 (1962). [5] А. И. Зинченко, Тр. семинара функциональн. анализа, Воронеж, 1963. [6] М. Н. Яковлев, ДАН, **156**, № 3, 522 (1964). [7] Е. И. Линьков, УМН, **19**, № 4, 227 (1964). [8] М. Н. Яковлев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **84**, 8 (1965). [9] М. Д. Бабич, В. В. Иванов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **7**, № 5, 988 (1967). [10] М. Д. Бабич, В. В. Иванов, Укр. матем. журн., **21**, № 7, 3 (1969).