Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 3

УДК 517:54

МАТЕМАТИКА

В. Я. ГУТЛЯНСКИЙ

ВАРИАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 VIII 1969)

1. В работах ([1], [2]) была установлена общая вариационная теорема на классах аналитических функций со структурной формулой и были даны различные приложения полученного результата к изучению геометрических свойств некоторых классов аналитических функций, определенных в единичном круге.

Настоящая работа посвящена установлению теорем о граничных функциях относительно достаточно общих дифференцируемых систем комплекснозначных функционалов, определенных на классах аналитических функций в круговом кольце и имеющих параметрическое представление интегралами Стильтьеса. Тем самым решение конкретных экстремальных проблем на таких классах функций сведено к их исследованию лишь на определенном семействе функций, зависящем от конечного числа вещественных параметров.

Стандартный метод получения теорем о граничных функциях позволяет нам ограничиться их формулировкой лишь для некоторых классов функций, таких как класс регулярных в кольце $K(q, 1) = \{z\colon q < |z| < 1, q > 0\}$ функций с положительной вещественной частью, класс регулярных однолистных и звездообразных в $K(q, 1)$ функций, класс типично вещественных в круговом кольце функций, класс аналитических в кольце $K(q^2, 1)$ функций, имеющий интегральное представление (7).

При доказательстве сформулированных теорем и аналогичных результатов на других классах аналитических функций, определенных в двусвязных областях и имеющих структурную формулу, мы существенно опираемся на вариационную теорему 1 работы ([1]), а также на фундаментальные результаты В. А. Зморовича, Л. Е. Дундученко, Ли Ен Пира, С. А. Касьянюка (см. ([3], [4]) и других авторов, посвященные установлению интегральных представлений различных классов аналитических функций в круговом кольце.

Приведены примеры применения полученных результатов к задачам об областях значений некоторых конкретных функционалов, определенных на классах аналитических функций в двусвязных областях.

2. Пусть $w = f(z)$ принадлежит одному из рассматриваемых ниже классов аналитических функций. Фиксируем в кольце $K(q, 1)$ произвольным образом точки $z_1, \ldots, z_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ и введем обозначения: $u_{mj} = f^{(m)}(z_j)$, $v_{mj} = \bar{u}_{mj}$ $(j = 1, \ldots, p;\ m = 0, 1, \ldots, s_j)$.

В теоремах 1—4 $I(f) = \{I_n(f)\}$ $(n = 1, \ldots, l)$ — конечная система функционалов $I_n(f)$ $(n = 1, \ldots, l)$ вида

$$I_n(f) = J_n(u_{01}, v_{01}, \ldots, u_{s_1 1}, v_{s_1 1}; \ldots; u_{0p} v_{0p}, \ldots, u_{s_p p}, v_{s_p p}), \tag{1}$$

где J_n $(n = 1, \ldots, l)$ — некоторые аналитические функции своих аргументов; Q — порядок системы $I(f)$, который определяется соотношением: $Q = s_1 + \ldots + s_p$. Отметим, что система $I(f)$ предполагается неособой, т. е. функции $\varphi_k(t)$ из теоремы 1 ([1]) имеют конечное число нулей на соответствующих промежутках.

Теорема 1. *Пусть система $I(f)$ определена на классе $P(q, 1)$ аналитических в $K(q, 1)$ функций с положительной вещественной частью и нормированных условием*

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\, d\varphi = 2\pi, \quad q < r < 1.$$

Тогда все граничные функции относительно $I(f)$ содержатся в семействе

$$f(z) = \sum_{s=1}^{L_1} \mu_1^{(s)} F\left(ze^{-it_1^{(s)}}\right) + \sum_{s=1}^{L_2} \mu_2^{(s)} F\left(\frac{q}{z} e^{it_2^{(s)}}\right) - 1, \tag{2}$$

где

$$F(x) = \frac{1+x}{1-x} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} (x^k - x^{-k}). \tag{3}$$

Здесь $\mu_k^{(s)}$, $t_k^{(s)}$ $(k = 1, 2)$ — вещественные параметры, подчиненные условиям: $\mu_k^{(s)} \geqslant 0$, $\mu_k^{(1)} + \ldots + \mu_k^{(L_k)} = 1$, $-\pi < t_k^{(1)} < \ldots < t_k^{(L_k)} \leqslant \pi$. При этом $L_k \leqslant Q + 2p$ $(k = 1, 2)$.

Обозначим через $S^*(q, 1)$ класс регулярных однолистных и звездообразных в кольце $K(q, 1)$ функций $w = f(z)$ [5].

Теорема 2. *Пусть система $I(f)$ определена на классе $S^*(q, 1)$. Тогда все граничные функции относительно $I(f)$ содержатся в семействе*

$$f(z) = cz \prod_{s=1}^{L_2} \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k-1} z e^{-it_2^{(s)}}\right)\left(1 - q^{2k-1} z^{-1} e^{it_2^{(s)}}\right) \right\}^{\mu_2^{(s)}} \times$$
$$\times \prod_{s=1}^{L_1} \left[\left\{ \left(1 - ze^{-it_1^{(s)}}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k} z e^{-it_1^{(s)}}\right)\left(1 - q^{2k} z^{-1} e^{it_1^{(s)}}\right) \right\}^{\mu_1^{(s)}} \right]^{-1}, \tag{4}$$

$$c = \mathrm{const},$$

зависящем от конечного числа вещественных параметров $\mu_k^{(s)}$, $t_k^{(s)}$, подчиненных условиям: $\mu_k^{(s)} \geqslant 0$, $\mu_k^{(1)} + \ldots + \mu_k^{(L_k)} = 2$, $-\pi < t_k^{(1)} < \ldots < t_k^{(L_k)} \leqslant \pi$. При этом $L_k \leqslant Q + 2p$ $(k = 1, 2)$.

Функции вида (4) отображают кольцо $K(q, 1)$ на звездообразные двусвязные области, полученные из всей плоскости исключением L_1 лучей, уходящих на бесконечность и содержащих начало координат на своем продолжении, и L_2 отрезков, выходящих из начала координат.

Обозначим через $T_r(q, 1)$ класс типично вещественных функций

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots,$$

регулярных в кольце $K(q, 1)$, а через $T_q(c_{-1}, c_1)$ — подкласс этого класса с фиксированными коэффициентами c_k $(k = 0, \pm 1)$ [6].

Теорема 3. *Пусть система функционалов $I(f)$ определена на классе $T_q(c_{-1}, c_1)$. Тогда все граничные функции относительно $I(f)$ содержатся в семействе*

$$f(z) = (c_1 - c_{-1}) \sum_{s=1}^{L_1} \mu_1^{(s)} S_q(z, \tau_1^{(s)}) - (qc_1 - q^{-1}c_{-1}) \sum_{s=1}^{L_2} \mu_2^{(s)} S_q\left(\frac{q}{z}, \tau_2^{(s)}\right) + c_0, \tag{5}$$

где

$$S_q(x, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{xq^{2k}}{1 - 2xq^{2k}\tau + x^2q^{4k}}. \qquad (6)$$

Здесь вещественные параметры $\mu_k^{(s)}$, $\tau_k^{(s)}$ *подчинены условиям:* $\mu_k^{(s)} \geqslant 0$, $\mu_1^{(1)} + \ldots + \mu_1^{(L_1)} = 1$, $\mu_2^{(1)} + \ldots + \mu_2^{(L_2)} = 1$, $-1 \leqslant \tau_k^{(1)} < \ldots < \tau_k^{(L_k)} \leqslant 1$, *при этом* $L_k \leqslant 2(Q + 2p)$ $(k = 1, 2)$.

Обозначим через U_q^* класс аналитических в кольце $K(q^2, 1)$ функций, имеющий интегральное представление [4]

$$f(z) = z \exp\left\{-2\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left[\frac{1 - ze^{-it}}{1 - q^2z^{-1}e^{it}}\right] d\mu(t)\right\}, \qquad (7)$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, а $\mu(t)$ — неубывающая на $[-\pi, \pi]$ функция, нормированная условиями $\mu(-\pi + 0) = \mu(-\pi) = 0$, $\mu(\pi) = 1$. Класс U_q^* симметричных относительно окружности $|w| = q$ функций $w = f(z)$ является естественным обобщением известного класса звездных в единичном круге функций порядка α.

Теорема 4. *Пусть система функционалов* $I(f)$ *определена на классе* U_q^*. *Тогда все граничные функции относительно* $I(f)$ *содержатся в семействе*

$$f(z) = z \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1 - q^2z^{-1}e^{it_k}}{1 - ze^{-it_k}}\right)^{\alpha\mu_k}, \qquad (8)$$

зависящем от конечного числа вещественных параметров μ_k, t_k $(k = 1, \ldots, N)$, *связанных условиями:* $\mu_k \geqslant 0$, $\mu_1 + \ldots + \mu_N = 2$, $-\pi < t_1 < \ldots < t_N \leqslant \pi$; *при этом* $N \leqslant 2(Q + p)$.

Подобные теоремы о граничных функциях имеют место для конечных систем, составленных из функционалов, аналитически зависящих от коэффициентов разложения функции $w = f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K(q, 1)$, а также для систем смешанного вида. Приведем одну из них, доказанную ранее другим методом Ю. Е. Аленициным [7].

Теорема 5. *Пусть система функционалов* $I(f) = \{c_{m_1}, \ldots, c_{m_N}\}$ $(m_1 < m_2 < \ldots < m_N)$ *определена на классе* $T_q(c_{-1}, c_1)$. *Тогда при* $|m_k| \neq |m_l|$ *для* $k \neq l$ *все граничные функции относительно* $I(f)$ *имеют вид* (5), *причем* $L_k \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$, *где* $n = \max(|m_1|, |m_N|)$.

3. Приведем несколько примеров применения теорем предыдущего параграфа к решению конкретных экстремальных задач.

Теорема 6. *Область* D *значений системы функционалов*

$$I(f) = \{f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)\} = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\} \qquad (9)$$

(z *принадлежит кольцу* $K(q, 1)$ *и фиксирована*), *определенной на классе* $P(q, 1)$, *представляет собой замкнутое ограниченное множество, совпадающее с выпуклой оболочкой геометрической суммы двух множеств* $(n + 1)$*-мерного комплексного пространства*

$$\begin{aligned} W_{l+1} &= F^{(l)}(ze^{it}), \quad l = 0, 1, \ldots, n; \ -\pi < t \leqslant \pi, \\ W_{l+1} &= F^{(l)}\left(\frac{q}{z}e^{-it}\right) - a_l, \quad l = 0, 1, \ldots, n; \ -\pi < t \leqslant \pi, \end{aligned} \qquad (10)$$

где $a_l = 1$ *при* $l = 0$; $a_l = 0$ *при* $l \neq 0$.

Граничными функциями являются функции вида (2), *причем* $L_k \leqslant \leqslant n+2$.

Теорема 7. *Область D значений функционала*

$$I(f) = \ln \frac{f(z)}{cz}, \quad |z| = r, \tag{11}$$

определенного на классе $S^*(q, 1)$, *есть выпуклая оболочка геометрической суммы двух плоских дуг*

$$I = -2\left\{\ln(1 - re^{it}) + \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - q^{2k}re^{it})(1 - q^{2k}r^{-1}e^{-it})\right\},$$

$$I = 2\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - q^{2k-1}re^{it})(1 - q^{2k-1}r^{-1}e^{-it}), \tag{12}$$

$$-\pi < t \leqslant \pi.$$

Граничными функциями являются функции вида (4), *причем* $L_k \leqslant 2$.

Из этой теоремы, в частности, следуют точные оценки для модуля и аргумента функции $f(z) \in S^*(q, 1)$, полученные ранее Л. Е. Дундученко ([8]).

Теорема 8. *Область D значений функционала*

$$I(f) = \ln\left|\frac{f(z)}{z}\right| + i \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \equiv x + iy. \tag{13}$$

определенного на классе U_q^*, *представляет собой замкнутое множество, совпадающее с выпуклой оболочкой кривой*

$$y = \frac{\alpha}{\tilde{a}b - a\tilde{b}}(ce^{x/\alpha} - \tilde{b})(1 + bc^{-1}e^{-x/\alpha}) + 1 - 2\alpha, \tag{14}$$

где $a - b \leqslant x \leqslant a + b$, $a(r) = (1 + r^2)/(1 - r^2)$, $b(r) = 2r/(1 - r^2)$, $\tilde{a} = a(q^2/r)$, $\tilde{b} = b(q^2/r)$, $c = 2r^3/(r^2 - q^4)$.

Граничными являются функции вида (8), *где* $N \leqslant 2$.

Донецкий вычислительный центр
Академии наук УССР

Поступило
25 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Александров, В. Я. Гутлянский, ДАН, **165**, № 5, 983 (1965). [2] И. А. Александров, В. Я. Гутлянский, Вопросы геометрической теории функций, **4**, Тр. Томск. гос. унив., **189**, 111 (1966). [3] В. А. Зморович, Изв. Киевск. политехн. инст., **15**, 126 (1954). [4] С. А. Касьянюк, Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1961, стр. 310—329. [5] В. А. Зморович, Матем. сборн., **32** (74), № 3, 633 (1953). [6] Ли Ен Пир, ДАН, **92**, № 3, 475 (1953). [7] Ю. Е. Аленицын, Вестн. ЛГУ, № 7, 25 (1962). [8] Л. Е. Дундученко, Докл. АН УССР, **2**, 119 (1956).