**Доклады Академии наук СССР**
**1970. Том 191, № 3**

УДК 511

*МАТЕМАТИКА*

Е. П. ГОЛУБЕВА

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 30 VII 1969)*

Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ — невырожденная целочисленная квадратичная форма. Известно ([1], [2]), что вопрос об асимптотическом распределении целых точек на поверхности

$$f(x_1, x_2, x_3) = n \tag{1}$$

при $n \to \infty$ тесно связан с вопросом о границе нулей $L$-функций Дирихле с действительными характерами. В этой заметке излагаются условные теоремы о равномерном распределении целых точек на поверхности (1) в случае, когда $f$ — диагональная форма.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, считается выполненным

Предположение. Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для достаточно большого целого $|m|$ функция

$$L(s, \chi) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{d}\right)}{d^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

не имеет нулей в прямоугольнике

$$1 - \frac{1}{(\ln |m|)^{1-\varepsilon}} < \operatorname{Re} s \leqslant 1, \quad |\operatorname{Im} s| \leqslant 1.$$

Будем употреблять следующие обозначения: $f(x_1, x_2, x_3)$ — диагональная целочисленная квадратичная форма определителя $D_f$, коэффициенты которой попарно взаимно просты и хотя бы один из них положителен; $n > 0$ — целое число, взаимно простое с $D_f$ и такое, что примитивно разрешимо сравнение

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv n \pmod 8;$$

функция $L(s, \chi)$ определяется при $\operatorname{Re} s > 1$ рядом

$$L(s, \chi) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-nD_f}{d}\right)}{d^s};$$

$\Omega$ — произвольная конечная выпуклая область на поверхности

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1, \tag{2}$$

$Q(n, \Omega)$ — число целых точек в проекции $\Omega$ на поверхность с уравнением (1), $\omega(\Omega)$ — объем конуса с основанием $\Omega$ и вершиной в $O$; если $f$ — положительная форма, то $Q_f(n)$ — число целых точек на эллипсоиде (1); $\eta_0$ — положительная постоянная, зависящая лишь от $D_f$ и $\varepsilon$.

**Теорема 1.** *Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ — положительная форма; тогда*

$$Q(n,\Omega) = c_0\omega(\Omega)\, Q_f(n) + O\left(\frac{n^{1/2}L(1,\chi)}{(\ln n)^{\gamma_0}}\right);$$

*$c_0$ и постоянная, входящая в остаток, не зависят от $\Omega$.*

Метод доказательства этой теоремы аналогичен методу, предложенному Ю. В. Линником (см. ([1]), стр. 189) для изучения распределения целых точек на сфере по сегментам, однако вместо эргодических соображений мы используем схему работы ([3]).

Ю. В. Линник ([4]) и А. В. Малышев (см. ([2]), гл. V) с помощью арифметики эрмитионов доказали ряд теорем о представлении чисел данной положительной тернарной квадратичной формой. Из результатов А. В. Малышева следует, в частности, что для формы $f$ с нечетными коэффициентами при некоторой постоянной $\varkappa > 0$

$$Q_f(n) > \varkappa n^{1/2} L(1, \chi),$$

если $L(s, \chi)$ не имеет нулей в круге

$$|s-1| < \frac{(\ln\ln n)^2 \ln\ln\ln n}{(\ln n)^{1/2}}.$$

Асимптотические формулы для количества решений уравнения (1) известны лишь для сравнительно узкого класса положительных форм (см. ([2]), гл. VI). Мы здесь укажем еще один класс форм, для которых можно найти асимптотику для $Q_f(n)$.

**Теорема 2.** *Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ — положительная форма такая, что, если $p$ и $q$ — произвольные простые делители $D_f$, то $p \equiv 1 \pmod 4$ и $(p/q) = 1$; тогда*

$$Q_f(n) = \prod_{p/D_f} \frac{1}{p+1}\, Q(nD_f) + O\left(\frac{Q(nD_f)}{(\ln n)^{\gamma_0}}\right),$$

*где $Q(nD_f)$ — количество целых точек на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = nD_f$.*

В работах Ю. В. Линника ([5]) и Б. Ф. Скубенко ([6]) были изучены асимптотико-геометрические свойства целых точек на поверхности (1) в двух наиболее важных случаях неопределенной формы $f$, когда $D_f = \pm 1$, связанных с теорией приведения бинарных квадратичных форм. Распределение целых точек на гиперболоидах общего вида до сих пор не рассматривалось.

**Теорема 3.** *Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ — неопределенная форма,*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \alpha_3 x_3^2,$$

*где $\alpha_2, \alpha_3 > 0$ и $|D_f|$ не является полным квадратом; пусть далее $\Omega_0$, $\Omega$ — две области на гиперболоиде (2), не содержащие точек вида $(x_1, x_2, 0)$, если $\alpha_1 > 0$, и вида $(0, x_2, 0)$ в противном случае, тогда*

$$Q(nD) = \frac{\omega(\Omega)}{\omega(\Omega_0)}\, Q(n, \Omega_0) + O\left(\frac{n^{1/2}L(1,\chi)}{(\ln n)^{\gamma_0}}\right).$$

Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства теоремы 1.

**Теорема 4.** *Пусть*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + Dx_3^2,$$

*где $D \neq 0$ — произвольное целое число; $\Omega_0$ — область на гиперболоиде (2), которая определяется неравенствами*

$$1 \leqslant x_1 - x_2 < 2,$$

$$2(x_1 - x_2) \leqslant x_3 < 4(x_1 - x_2);$$

*тогда*

$$Q(n, \Omega_0) = n^{1/2} g(n) \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\xi_0}}\right)\right),$$

*где*

$$g(n) \geqslant cL(1, \chi),$$

$\xi_0$ *и* $c$ *— некоторые положительные постоянные.*

Эта теорема является безусловной. Доказательство ее опирается на технику работы ([7]) с применением результатов Берджесса ([8]).

В заключение выражаю благодарность А. И. Виноградову за внимание к этой работе и советы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 VII 1969

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967. [2] А. В. Малышев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 45, 1 (1962). [3] А. И. Виноградов, Матем. заметки, 1, № 2, 189 (1967). [4] Ю. В. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 4/5, 363 (1940). [5] Ю. В. Линник, Вестн. ЛГУ, № 2, 3 (1955); № 5, 3 (1955); № 8, 15 (1955). [6] Б. Ф. Скубенко, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 5, 721 (1962). [7] C. Hooley, Math. Zs., 69, № 3, 15 (1958). [8] D. A. Burgess, Proc. Lond. Math. Soc., 12, № 46, 193 (1962).