Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 513.731 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

О ГОМЕОМОРФИЗМЕ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, СОХРАНЯЮЩЕМ ВАРИАЦИИ ПОВОРОТА КРИВЫХ

Пусть $L(A_1A_2\ldots A_n)$ — ломаная с вершинами A_k. Поворотом ломаной L называется число

$$\psi(L)=\sum_k(\pi-\alpha_k),$$

где α_k — угол между звеньями ломаной, сходящимися в вершине A_k. Вариацией поворота кривой называется точная верхняя грань поворотов ломаных, вписанных в эту кривую. Кривые ограниченной вариации поворота введены А. Д. Александровым и хорошо изучены. Некоторые их свойства, которые в дальнейшем используются, можно найти в [1]. Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Гомеоморфное точечное соответствие между выпуклыми поверхностями, сохраняющее вариации поворота кривых, есть подобие.*

Пусть F и F' — две выпуклые поверхности, между которыми установлен гомеоморфизм f, сохраняющий вариации поворота кривых. Покажем сначала, что гомеоморфизм f есть конформное соответствие. Возьмем на поверхности F произвольную точку A и два направления из этой точки на поверхности. Проведем в этих направлениях из точки A кривые γ_1 и γ_2 ограниченной вариации поворота. Таковыми являются, например, плоские сечения поверхности. На поверхности F' точке A соответствует точка A', а кривым γ_1 и γ_2 — кривые γ_1' и γ_2', исходящие из точки A'. Так как кривые γ_1' и γ_2' ограниченной вариации поворота, то они в точке A' имеют определенные направления (полукасательные).

Обозначим через γ кривую, составленную из кривых γ_1 и γ_2. Вариация ее поворота

$$\psi(\gamma)=\psi(\gamma_1)+\psi(\gamma_2)+(\pi-\alpha),$$

где α — угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке A. Аналогично для кривой γ', составленной из кривых γ_1' и γ_2', будем иметь

$$\psi(\gamma')=\psi(\gamma_1')+\psi(\gamma_2')+(\pi-\alpha'),$$

где α' — угол между кривыми γ_1' и γ_2' в точке A'. По условию теоремы $\psi(\gamma)=\psi(\gamma')$, $\psi(\gamma_1)=\psi(\gamma_1')$, $\psi(\gamma_2)=\psi(\gamma_2')$. Поэтому $\alpha=\alpha'$. Так как направления кривых γ_1 и γ_2 в точке A взяты произвольно, то это значит, что соответствие f является конформным.

Пусть γ — замкнутая плоская кривая на поверхности F. Она выпуклая и поэтому имеет вариацию поворота, равную 2π. Так как соответствующая кривая на поверхности F' тоже замкнутая и тоже имеет вариацию поворота 2π, то она плоская и выпуклая. Действительно, если она не плоская, то в нее вписывается пространственный четырехугольник, а он имеет поворот заведомо больше 2π. Если она плоская, но не выпуклая, то в нее вписывается невыпуклый многоугольник, а его поворот больше 2π.

Чтобы не обременять доказательства, ограничимся теперь случаем гладких выпуклых поверхностей F и F'. Пусть A — произвольная точка поверхности F и A' — соответствующая ей точка поверхности F'. Проведем плоскость, отделяющую точку A от края поверхности F. Она разбивает поверхность F на две части. Пусть F_A — та из этих частей, которой принадлежит точка A. Соответствующую при гомеоморфизме f часть поверхности F' обозначим через F_A'. Очевидно, поверхность F_A' тоже имеет плоский край. Для того чтобы доказать подобие поверхностей F и F', достаточно доказать подобие поверхностей F_A и F_A' для случая произвольно взятой точки A. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что исходные поверхности F и F' имеют плоский край.

Возьмем две произвольные точки A_1 и A_2 на поверхности F. Пусть A_1' и A_2' — соответствующие им точки на поверхности F'. Так как поверхность F строго выпуклая и имеет плоский край, то через точки A_1 и A_2 можно провести плоское сечение γ, не пересекающее края поверхности. Соответствующая кривая γ', проходящая через точки A_1' и A_2' на поверхности F', тоже будет плоским сечением.

Пусть σ и σ' — плоскости, в которых лежат кривые γ и γ'; α_1 и α_2 — касательные плоскости поверхности F в точках A_1 и A_2; α_1' и α_2' — касательные плоскости поверхности F' в точках A_1' и A_2'. Построим проективное преобразование пространства, которое переводит точки A_1 и A_2 в A_1' и A_2', плоскости α_1 и α_2 — в α_1' и α_2', плоскости σ — в плоскости σ'. Последнее условие выполнимо ввиду конформности соответствия в плоских пучках с центрами A_1 и A_1', A_2 и A_2', которое определяется пересечением плоскостей σ и σ' с касательными плоскостями α_1 и α_1', α_2 и α_2'. Это проективное преобразование обладает следующими свойствами: 1) оно сохраняет углы между прямыми пучка с центром A_1 в плоскости α_1; 2) оно сохраняет углы, которые образуют прямые пересечения плоскостей σ с плоскостями α_1 и α_2. Первое свойство следует из конформности гомеоморфизма f. Второе свойство следует из равенства поворотов кривых γ и γ' между точками A_1 и A_2, A_1' и A_2'.

Доказывается, что *построенное проективное преобразование есть подобие*. Отсюда следует, что если поверхности F и F' одинаково ориентированы, то при совмещении их точками A_1 и A_1' и соответствующими направлениями в этих точках лучи A_1A_2 и $A_1'A_2'$ совпадают, а касательные плоскости поверхностей в точках A_2 и A_2' будут параллельны.

Совместим поверхности F и F' точками A_1 и A_1' и соответствующими направлениями в этих точках. Примем точку совмещения за начало координат и обозначим через r и r' — векторы соответствующих точек поверхностей F и F' в таком расположении. Тогда

$$r = \lambda r', \quad dr = \mu\, dr'.$$

Дифференцируя первое равенство и сравнивая его со вторым, заключаем, что $d\lambda = 0$, т. е. $\lambda = \text{const}$ и, следовательно, поверхности F и F' подобны.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
5 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, «Наука», 1969.