

А. Г. РАММ

**РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ  
НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА**

(Представлено академиком В. А. Фоком 12 VI 1969)

В работе дан простой метод доказательства теоремы разложения по собственным функциям несамосопряженного оператора Шредингера. Хотя метод прост, по-видимому, к рассматриваемой задаче он не применялся<sup>(2-7)</sup>. Исследование оператора Шредингера с комплексным потенциалом представляет интерес, в частности, для ядерной физики<sup>(1)</sup>. В первой части работы дано доказательство теоремы разложения по собственным функциям несамосопряженного уравнения Шредингера. Во второй части сделан ряд замечаний.

1. Пусть  $f(x)$  — дважды дифференцируемая финитная функция,  $\mathcal{L} = -\Delta + q(x)$ ,  $q(x)$  — комплекснозначная дифференцируемая функция, удовлетворяющая оценке  $|q(x)| \leq C \exp(-a|x|)$ ,  $a > 0$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Здесь и ниже буквой  $C$  обозначены оценочные постоянные. Из результатов работ<sup>(8a-г, ж)</sup> вытекает, что при сделанных предположениях верны следующие утверждения:

1. Пусть  $R(x, y, \sqrt{\lambda})$  — ядро резольвенты  $(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}$  оператора  $\mathcal{L}$ . Тогда  $R(x, y, \sqrt{\lambda}) = R(y, x, \sqrt{\lambda})$ ,

$$(\mathcal{L}_z - \lambda I)R(x, z, \sqrt{\lambda}) = \delta(x - z); \quad (\mathcal{L}_z - \lambda I)R(z, y, -\sqrt{\lambda}) = \delta(z - y). \quad (1)$$

Ядро резольвенты удовлетворяет интегральным уравнениям

$$R(x, y, k) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|} - \int \frac{\exp(ik|x-t|)}{4\pi|x-t|} q(t) R(t, y, k) dt, \quad (2)$$

$$R(x, y, k) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|} - \int \frac{\exp(ik|y-t|)}{4\pi|y-t|} q(t) R(x, t, k) dt, \quad k = \sqrt{\lambda}. \quad (3)$$

Интегрирование ведется по всему трехмерному пространству. При всех  $k$ , принадлежащих полуплоскости  $\text{Im } k > -b$ , где  $b < a/2$ , за исключением конечного числа точек  $k_j$ , уравнения (2) однозначно разрешимы в пространстве  $C(E_3, \exp[-1/2a|x|])$ . Ядро  $R(x, y, k)$  аналогично по  $k$  всюду при  $\text{Im } k > -b$ , за исключением упомянутых точек  $k_j$ , которые являются полюсами ядра.

2. Полюса  $k_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , лежащие в области  $\text{Im } k > 0$ , являются собственными числами оператора  $\mathcal{L}$ . Полюса, лежащие в области  $\text{Im } k \leq 0$ , не являются собственными числами оператора  $\mathcal{L}$ , так как соответствующие им собственные функции, вообще говоря, не интегрируемы с квадратом. Эти полюса называют неспектральными особенностями (квазисобственными числами). Обозначим через  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq q$  ( $\mu_j$ ,  $0 \leq j \leq s$ ) полюса  $k_j$ , лежащие на отрицательной (неотрицательной) вещественной полуоси. Как показывают примеры, точка  $k=0$  даже в случае вещественного потенциала может быть как собственным, так и квазисобственным числом оператора  $\mathcal{L}$ .

3. Имеет место оценка

$$\max_{x \in E_3} \exp(-1/2a|x|) \left| \int R(x, y, k) f(y) dy \right| \leq \frac{C}{1+|k|},$$

$$\text{Im } k > -b, \quad |k - k_j| \geq \delta > 0; \quad C = C(f, \delta).$$

4. Верны формулы:

$$R(x, y, k) = \frac{\exp(ik|x|)}{4\pi|x|} u(y; k, n)(1 + o(1)), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{|x|} = n; \quad (4a)$$

$$R(x, y, k) = \frac{\exp(ik|y|)}{4\pi|y|} u(x; k, n)(1 + o(1)), \quad |y| \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{|y|} = n. \quad (4b)$$

5. Решения задачи рассеяния определяются из уравнения

$$u(x; k, n) = \exp[-ik(n, x)] - \int \frac{\exp(ik|x-t|)}{4\pi|x-t|} q(t) u(t; k, n) dt, \quad (5)$$

которое однозначно разрешимо в  $C(E_3, \exp[-1/2a|x|])$  при  $k \neq k_j$ ,  $\text{Im } k > -b$ . Решение уравнения (5) аналитично по  $k$  при  $k \neq k_j$ ,  $\text{Im } k > -b$ .

Для доказательства теоремы разложения проинтегрируем легко проверяемое тождество  $f/k^2 = -R(k)f + R(k)\mathcal{L}f/k^2$  по контуру  $C_N$ :  $|k| = N$ ,  $0 \leq \arg k \leq \pi$ , умножив предварительно обе его части на  $k$ . Через  $R(k)$  обозначен оператор  $(\mathcal{L} - k^2 I)^{-1}$  с ядром  $R(x, y, k)$ . Получим

$$f = -\frac{1}{i\pi} \int_{C_N} R(k)fk dk + \frac{1}{i\pi} \int_{C_N} \frac{R(k)\mathcal{L}f}{k} dk = J_1 + J_2. \quad (6)$$

Пусть  $\mathcal{L}f$  — дважды дифференцируемая функция. Тогда, в силу утверждения 3, верно равенство:  $\lim_{N \rightarrow \infty} J_2 = 0$ , где предел понимается в смысле сходимости в  $C(E_3, \exp[-1/2a|x|])$  и потому равномерно достигается во всякой конечной области  $D \subset E_3$ . Преобразуем  $J_1$ , пользуясь утверждением 1 и предполагая добавочно, что  $\mu_0 \neq 0$  (от этого предположения мы освободимся ниже). Применяя теорему Коши, получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{i\pi} \int_{C_N} R(k)fk dk \right] = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma} R(k)fk dk + \sum_{j=1}^{p+q} -\frac{1}{i\pi} \oint_{\gamma_j} R(k)fk dk. \quad (7)$$

Здесь  $\gamma_j$  — малая окружность с центром в точке  $k_j$ , сумма распространена на полюса, лежащие в области  $\text{Im } k > 0$ , и на полюса  $v_j$ . Заметим, что (4)  $-\frac{1}{i\pi} \oint_{\gamma_j} R(k)fk dk = P_j f$ , где  $P_j$  — проектор на корневое под-

пространство оператора  $\mathcal{L}$ , отвечающее числу  $k_j^2$  \*. Контур  $\gamma$  идет вдоль вещественной оси плоскости  $k$ , имеет начало координат центром симметрии (это возможно, так как  $\mu_j \neq 0$ ), огибает точки  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq q$ , и  $-\mu_j$ ,  $0 \leq j \leq s$ , малыми полуокружностями, лежащими в области  $\text{Im } k < 0$ , а точки  $\mu_j$ ,  $0 \leq j \leq s$ , и  $-v_j$ ,  $1 \leq j \leq q$ , малыми полуокружностями, лежащими в области  $\text{Im } k > 0$ . Обозначим через  $\gamma_+$  часть контура  $\gamma$ , лежащую в области  $\text{Re } k \geq 0$ . Имеем

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\gamma} R(k)fk dk = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_+} dk k [R(k) - R(-k)] f. \quad (8)$$

Чтобы получить теорему разложения, остается выразить разность  $R(k) - R(-k)$  через решения задачи рассеяния (<sup>8a</sup>, <sup>9</sup>), используя уравнение (2), формулу Грина и асимптотику (4), получаем:

$$\begin{aligned} & R(x, y, k) - R(x, y, -k) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq r} \{R(z, y, -k) \Delta_z R(x, z, k) - R(x, z, k) \Delta_z R(z, y, -k)\} dz = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|z|=r} \left\{ R(z, y, -k) \frac{\partial R(x, z, k)}{\partial |z|} - R(x, z, k) \frac{\partial R(z, y, -k)}{\partial |z|} \right\} ds = \\ &= \frac{ik}{8\pi^2} \int_S u(x; k, n) u(y; -k, n) dn. \end{aligned} \quad (9)$$

\* При  $\text{Im } k_j > 0$ .

Здесь  $S$  — единичная сфера трехмерного пространства,  $dn$  — элемент ее площади. Введем обозначение

$$\hat{f}(k, n) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(y) u(y; -k, n) dy. \quad (10)$$

Тогда формула (6) с учетом равенств (7) — (10) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\gamma_+ S} \hat{f}(k, n) u(x; k, n) k^2 dk dn + \sum_{j=1}^{p+q} P_j f. \quad (11)$$

Формулы (10), (11) составляют теорему разложения по собственным функциям оператора  $\mathcal{L}$ . Если все полюса  $k_j$ , лежащие в области  $\text{Im } k > -b$ ,  $b > 0$ , не вещественны, то контур  $\gamma_+$  совпадает с полуосью  $[0, \infty)$ ,  $q = 0$  и формула (11) примет вид, аналогичный формуле (16) из (8a), где доказана теорема разложения для самосопряженного оператора  $\mathcal{L}$ .

Введем формулы, аналогичные формулам (10), (11), не предполагая, что  $\mu_0 \neq 0$ . Если  $\mu_0$  — полюс первого порядка, то функция  $kR(x, y, k)$  аналитична в окрестности точки  $k = 0$ , и предыдущие рассуждения сохраняют силу без всяких изменений. Если  $\mu_0 = 0$  — полюс второго порядка ядра  $R(x, y, k)$ , то функция  $kR(x, y, k)$  имеет в точке  $k = 0$  простой полюс. Если взять контур  $\gamma_1$ , совпадающий с описанным после формулы (7) контуром  $\gamma$  всюду вне малой окрестности нуля и обходящий нуль малой полуокружностью радиуса  $\varepsilon > 0$ , лежащей в области  $\text{Im } k \geq 0$ , то рассуждения, приведенные после формулы (7), сохранят силу, но в правой части формулы (8) добавится вклад от малой полуокружности  $C_\varepsilon$ , обходящей точку  $k = 0$ , равный  $-\int a(x, y) f(y) dy$ , где  $a(x, y)$  — вычет  $kR(x, y, k)$  в точке  $k = 0$ . Поэтому в рассматриваемом случае при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_1} R(k) f k dk = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_+} [R(k) - R(-k)] f k dk - \int a(x, y) f(y) dy. \quad (12)$$

Следовательно, формула (11) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\gamma_+ S} \hat{f}(k, n) u(x; k, n) k^2 dk dn + \sum_{j=1}^{p+q} P_j f - \int a(x, y) f dy, \quad (13)$$

где сохранены обозначения (11). Сформулируем полученные результаты.

**Теорема 1.** Пусть выполнены сделанные в начале п. 1 предположения,  $\mathcal{L}f$  — дважды дифференцируемая функция и точка  $k = 0$  является точкой аналитичности или полюсом первого порядка ядра  $R(x, y, k)$  резольвенты оператора  $\mathcal{L}$  (это ядро определяется из интегрального уравнения (2) или (3)). Тогда справедливы формулы обращения (10), (11). Если точка  $k = 0$  является полюсом второго порядка ядра  $R(x, y, k)$ , то формула обращения принимает вид (13), где  $a(x, y) = \text{Res}_{k=0} kR(x, y, k)$ .

Рассмотрим случай, когда точка  $k = 0$  есть полюс ядра порядка  $n + 1$ ,  $n > 1$ . Возьмем в качестве  $\gamma$  в формуле (7) контур  $\gamma_1$ . Если  $n > 1$ , то величина

$\int_{C_\varepsilon} R(k) f k dk$  не имеет конечного предела при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому

вместо формулы (12) получим равенство

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_1} R(k) f k dk = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_+^\varepsilon} dk k [R(k) - R(-k)] f + \int_{C_\varepsilon} R(k) f k dk. \quad (14)$$

Здесь  $\gamma_+^\varepsilon$  — часть контура  $\gamma_+$ , расположенная в области  $\text{Re } k > \varepsilon$ . Вместо формулы (13) с учетом равенства (14) получим:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\gamma_+^\varepsilon S} \hat{f}(k, n) u(x; k, n) k^2 dk dn + \sum_{j=1}^{p+q} P_j f +$$

$$+ \int_{\tilde{C}_\varepsilon}^{\gamma} dk k \int R(x, y, k) f(y) dy. \quad (15)$$

(15) играет роль формулы обращения в рассматриваемом общем случае.

II. Рассмотрим некоторые соображения, связанные с данным в п. I методом доказательства теоремы разложения по собственным функциям. Существенны для приведенного доказательства следующие моменты.

1) Ядро  $R(x, y, \sqrt{\lambda})$  резольвенты дифференциального оператора допускает аналитическое продолжение в полуплоскость  $\text{Im } k > -b$ ,  $b > 0$ ,  $k = \gamma\lambda$ , причем это продолжение мероморфно и имеет конечное число полюсов в области  $\text{Im } k > -\varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  произвольно малое, но фиксированное число.

2) Величина  $R(k)f$  стремится к нулю при  $|k| \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq \arg k \leq \pi$ . Вместо утверждения § п. 1 достаточно было бы иметь соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{0 \leq \arg k \leq \pi} R(x, y, k) f(y) dy = 0$$

равномерно относительно  $x$ , меняющееся в любой ограниченной области. Поэтому предположение о том, что функция  $\mathcal{L}f$  дважды дифференцируема, можно ослабить. 3) Для ядра верны асимптотические формулы (4), позволяющие выразить разность  $R(k) - R(-k)$  через решения задачи рассеяния.

Так как в двумерных задачах аналитическое продолжение ядра  $R(x, y, k)$  осуществляется на плоскость с разрезом, начинающимся в точке  $k = 0$  (<sup>8в</sup>, г, ж), то для проведения схемы доказательства теоремы разложения, данной в п. I, надо убедиться, что точка  $k = 0$  не есть точка сгущения полюсов ядра. В ряде случаев это сделано в работе (<sup>8ж</sup>).

Выбор контура  $\gamma$  в формуле (7) не является единственно возможным. Например, можно было бы брать вместо  $\gamma$  контур  $\tilde{\gamma}$ , симметричный контуру  $\gamma$  относительно вещественной оси. При этом, например, в формуле (11) суммирование велось бы до индекса  $p + s$ , контур  $\gamma_+$  надо было бы заменить контуром  $\tilde{\gamma}_+$ . Контур  $\gamma$  желательно выбрать так, чтобы левую часть равенства (8) оказалось возможным преобразовать в интеграл от величины  $[R(k) - R(-k)]f$ , которую можно выразить через решения задачи рассеяния. Если ядро  $R(x, y, k)$  не имеет полюсов на вещественной оси, то контур  $\gamma_+$  в формуле (11) совпадает с полуосью  $[0, \infty)$ .

В заключение отметим, что теорема разложения для самосопряженного оператора  $\mathcal{L}$ , рассматриваемого во всем пространстве, получена в работе (<sup>9</sup>), в областях с бесконечной границей — в работе (<sup>8а</sup>). В работе (<sup>6</sup>) анонсирована некоторая теорема разложения для несамосопряженного оператора  $\mathcal{L}$ , рассматриваемого в трехмерном пространстве, полученная с помощью разложения по собственным функциям бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Методом, данным в настоящей работе, можно доказать теорему разложения по собственным функциям оператора Шредингера краевой задачи Дирихле во внешности ограниченной области с достаточно гладкой звездной границей и внутри угловой области.

Ленинградский институт  
точной механики и оптики

Поступило  
4 VI 1969

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. С. Давыдов, Теория атомного ядра, М., 1958. <sup>2</sup> М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1, 11 (1951). <sup>3</sup> М. В. Келдыш, В. Б. Лидский, Тр. IV Всесоюз. матем. съезда, 1, 1963, стр. 101. <sup>4</sup> И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. <sup>5</sup> М. А. Наймарк, УМН, 11, № 6, 183 (1956). <sup>6</sup> М. Г. Гасымов, ДАН, 179, № 3, 518 (1968). <sup>7</sup> Р. М. Мартиросян, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, № 6, 897 (1960). <sup>8</sup> А. Г. Рамм, а) ДАН, 153, № 2, 282 (1963); Матем. сборн., 66, № 3, 321 (1965); б) ДАН, 166, № 6, 1319 (1966); в) УМН, 19, № 5, 192 (1964); г) Докл. АН АзербССР, 21, № 1, 3 (1965); д) ДАН, 163, № 3, 584 (1965); е) Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 1, 124 (1966); ж) Изв. АН АрмССР, серия матем., 3, № 6, 443 (1968). <sup>9</sup> А. Я. Повзнер, ДАН, 104, № 3, 360 (1955).