Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 513.832/835 *МАТЕМАТИКА*

В. А. РОХЛИН

О НОРМАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ ЭЙЛЕРА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ И БУТЫЛКИ КЛЕЙНА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 15 VII 1969)

1. Формулировка результатов. В этой заметке многообразиями называются гладкие многообразия, и такие термины, как вложение, погружение (иммерсия) и изотопия, имеют дифференциально-топологический смысл. Если f — погружение замкнутого n-мерного многообразия M в ориентированное эвклидово пространство $\mathbf{R}^{2n}$, то определено нормальное число Эйлера $x(f) \in \mathbf{Z}$. Напомню, что оно меняет знак, когда $\mathbf{R}^{2n}$ меняет ориентацию, и равно нулю при нечетном n, а также при четном n, если многообразие M ориентируемо и f — вложение. Через N_k обозначается неориентируемое связное замкнутое двумерное многообразие с эйлеровой характеристикой $2 - k$ (сфера с k пленками Мебиуса).

В 1941 г. Уитни [1] опубликовал теорему, согласно которой $x(f) \equiv 2k \bmod 4$ для всякого вложения $f\colon N_k \to \mathbf{R}^4$. В той же статье он сформулировал проблему полного описания значений $x(f)$, отвечающих всевозможным вложениям $f\colon N_k \to \mathbf{R}^4$, и высказал предположение, что это — значения $-2k, -2k+4, \ldots, 2k-4, 2k$. Что эти значения реализуются — показать нетрудно: для проективной плоскости $\mathbf{R}P^2 = N_1$ вложение в $\mathbf{R}^4$ с $x = \pm 2$ хорошо известно (и описано, например, в [2], стр. 295), для N_k с произвольным k реализующие вложения можно построить при помощи разложения $N_k = \mathbf{R}P^2 \# \ldots \# \mathbf{R}P^2$ (k слагаемых), вкладывая слагаемые в $\mathbf{R}^4$ с $x = \pm 2$ и соединяя их трубочками. Например, в случае бутылки Клейна $Kl = N_2 = \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$ для слагаемых имеются четыре комбинации значений $x = \pm 2$ ($-2, -2$; $-2, 2$; $2, -2$; $2, 2$), приводящие к вложениям $Kl \to \mathbf{R}^4$ с $x = -4, 0, 0, 4$.

В 1964 г. Маховальд [3] опубликовал многомерное обобщение теоремы Уитни. Определим для связного замкнутого многообразия M размерности n число $\omega(M)$ формулой

$$\omega(M) = 0, \text{ если } \bar{w}_1(M)\bar{w}_{n-1}(M) = 0, \quad \omega(M) = 1, \text{ если } \bar{w}_1(M)\bar{w}_{n-1}(M) \neq 0,$$

где $\bar{w}_i$ — нормальные классы Штифеля — Уитни. Очевидно, $\omega(N_k) \equiv k \bmod 2$, и, согласно одной теореме Масси [4], $\omega(M) = 0$, если n — не степень двойки. Маховальд доказал, что если n четно и $f\colon M \to \mathbf{R}^{2n}$ — вложение, то $x(f) \equiv 2\omega(M) \bmod 4$. Как заметил Малый [5], при $n > 2$ эта теорема легко обращается: для всякого неориентируемого связного замкнутого многообразия M четной размерности $n > 2$ и всякого целого x, удовлетворяющего сравнению $x \equiv 2\omega(M) \bmod 4$, существует вложение $f\colon M \to \mathbf{R}^{2n}$ с $x(f) = x$.

Предлагаемая заметка посвящена первоначальной проблеме Уитни ($n = 2$). В ней доказывается, что *для любого вложения* $\mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$ *нормальное число Эйлера сравнимо по модулю* 16 *с одним из чисел* $-2, 2$, *а для любого вложения* $Kl \to \mathbf{R}^4$ *нормальное число Эйлера сравнимо по модулю* 16 *с одним из чисел* $-4, 0, 4$.

В основе доказательства лежит геометрическая конструкция, связывающая проблему Уитни с известной проблемой реализации двумерных классов гомологий в четырехмерном многообразии сферами.

Тот же метод может быть применен и к поверхностям N_k с $k > 2$, однако для них он не приводит к новым результатам.

2. Доказательство соотношения $x(f) \equiv \pm 2 \bmod 16$ для вложения f: $\mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$. Разрежем обычным образом проективную плоскость $\mathbf{R}P^2$ на круг K и ленту Мебиуса L и вложим стандартно L в $\mathbf{R}^3$. Компонируя это вложение с включением $\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}^4$, мы получим вложение φ: $L \to \mathbf{R}^4$, при котором лента $\varphi(L)$ ортогонально выходит своим краем C на край $\partial T = S^1 \times S^2$ трубчатой окрестности $T = S^1 \times D^3$ окружности S^1 в $\mathbf{R}^4$.

Вложение f: $\mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$ называется специальным, если $f|_L = \varphi$ и $f(K) \subset \mathbf{R}^4 \setminus \operatorname{Int} T$. Нетрудно показать, что всякое вложение $\mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$ изотопно специальному. Поэтому в проблеме Уитни для проективной плоскости можно ограничиться специальными вложениями.

Построим в $\mathbf{R}^4$ на ленте $\varphi(L)$ какое-нибудь нормальное векторное поле u без особенностей и обозначим через v его сужение на C. Если f: $\mathbf{R}P^2 \to$ $\to \mathbf{R}^4$ — специальное вложение, то поле v определяет в центре круга $f(K)$, для которого окружность C служит границей, особенность, индекс которой равен $x(f)$. В частности, поле v, рассматриваемое как нормальное векторное поле на C в ∂T, не зависит, с точностью до гомотопии, от выбора поля u. Дополнив $\mathbf{R}^4$ точкой до S^4 и превратив этим $\mathbf{R}^4 \setminus \operatorname{Int} T$ в $S^4 \setminus \operatorname{Int} T =$ $= D^2 \times S^2$, мы приходим к следующей переформулировке проблемы Уитни для проективной плоскости: на крае $S^1 \times S^2$ многообразия $D^2 \times S^2$ лежит (описанная выше) окружность C, оснащенная (описанным выше) нормальным векторным полем v; какие индексы определяет это поле на всевозможных кругах, натягиваемых (гладко и без самопересечений) на C в $D^2 \times S^2$ ортогонально краю? Такие круги мы будем называть нормальными, и индекс, определяемый полем v на нормальном круге X, будем обозначать через $i(X)$.

Ориентация пространства $\mathbf{R}^4$ определяет ориентацию многообразия $D^2 \times S^2$. Мы ориентируем S^2 и тем самым все нормальные круги. Если X, Y — нормальные круги, то определена различающая $\delta(X, Y) \in$ $\in H_2(D^2 \times S^2) = \mathbf{Z}$ с обычными свойствами; в частности, $\delta(X, Y) +$ $+ \delta(Y, Z) = \delta(X, Z)$. Если ввести в рассмотрение удвоение $S^2 \times S^2$ многообразия $D^2 \times S^2$ и реализовать X в одной половине, а Y — в другой, то в $S^2 \times S^2$ из X и Y составится вложенная сфера, представляющая гомологический класс $2\xi + \delta(X, Y)\eta$, где ξ, η — естественные образующие группы $H_2(S^2 \times S^2)$. Индекс самопересечения этого класса равен $4\delta(X, Y)$, и он же равен $i(Y) - i(X)$.

Так как, согласно § 1, существуют вложения $\mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$ с нормальными числами Эйлера -2 и 2, то существуют нормальные круги X_0, X_1 с $i(X_0) =$ $= -2$ и $i(X_1) = 2$. Так как $i(X_1) - i(X_0) = 4\delta(X_0, X_1)$, то $\delta(X_0, X_1) = 1$, и потому $\delta(X_0, X) = \delta(X_1, X) + 1$ для любого нормального круга X. Последняя формула показывает, что одно из чисел $\delta(X_0, X)$, $\delta(X_1, X)$ четно и, значит, один из двух классов $2\xi + \delta(X_j, X)\eta \in H_2(S^2 \times S^2)$ делится на 2. Так как эти классы реализуются вложенными сферами, то, в силу теоремы Кервера — Милнора ([6]), одно из чисел $\delta(X_0, X)$, $\delta(X_1, X)$ делится на 4. Таким образом, $i(X) \equiv \pm 2 \bmod 16$.

3. Доказательство соотношения $x(f) \equiv 0, \pm 4 \bmod 16$ для вложения f: $Kl \to \mathbf{R}^4$. Это доказательство аналогично предыдущему, но немного сложнее. Лента Мебиуса, т. е. продырявленная проективная плоскость, заменяется продырявленной бутылкой Клейна. Средней линией новой ленты служит букет двух окружностей. Имеется стандартное вложение этой ленты в S^4, при котором лента размещается в стандартной окрестности T стандартного букета двух окружностей и ортогонально выходит своим краем C на ∂T. Всякое вложение $Kl \to S^4$ изотопно специальному вложению, совпадающему на ленте со стандартным и переводящему круг, который дополняет ленту до Kl, в $V = S^4 \setminus \operatorname{Int} T$. Как и в § 1, лента определяет на C в ∂T единственное с точностью до гомотопии нормальное векторное

поле, и проблема Уитни для бутылки Клейна оказывается эквивалентной следующей проблеме: на крае ∂V многообразия V лежит (указанная) окружность C, оснащенная указанным векторным полем; какие $i(X)$ определяет это поле на всевозможных нормальных кругах X, т. е. кругах, натягиваемых на C в V гладко, без самопересечений и ортогонально ∂V?

Многообразие V представляет собой пограничную связную сумму двух экземпляров многообразия $D^2 \times S^2$, т. е. получается из них в результате отождествления трехмерного шара, взятого на границе первого экземпляра, с его двойником на границе второго экземпляра. В частности, $\partial V = S^1 \times \times S^2 \# S^1 \times S^2$. Мы примем такие же соглашения об ориентациях, как в § 2. Как и там, для нормальных кругов X, Y определена различающая $\delta(X, Y)$ с обычными свойствами, однако теперь $\delta(X, Y) \in H_2(V) = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}$, так что $\delta(X, Y)$ представляет собой пару целых чисел $\delta_1 = \delta_1(X, Y)$, $\delta_2 = \delta_2(X, Y)$. В удвоении $S^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2$ многообразия V круги X, Y определяют вложенную сферу, реализующую гомологический класс $2(\xi_1 + \xi_2) + \delta_1\eta_1 + \delta_2\eta_2$, где ξ_1, η_1; ξ_2, η_2 — естественные образующие группы $H_2(S^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2)$. Вычисляя, как в § 2, индекс самопересечения этого класса двумя способами, мы видим, что $i(Y) - i(X) = 4(\delta_1 + \delta_2)$. Четырем вложениям $Kl \to \mathbf{R}^4$, описанным в п. 1, отвечают нормальные круги X_{00}, X_{01}, X_{10}, X_{11} с $i(X_{00}) = -4$, $i(X_{01}) = i(X_{10}) = 0$, $i(X_{11}) = 4$ и с $\delta_1(X_{pq}, X_{rs}) = r - p$, $\delta_2(X_{pq}, X_{rs}) = s - q$ $(p, q, r, s = 0, 1)$.

Отсюда в силу $\delta_j(X_{pq}, X) = \delta_j(X_{rs}, X) + \delta_j(X_{pq}, X_{rs})$ $(j = 1, 2)$, для любого нормального круга X существует круг X_{pq} с четными $\delta_1(X_{pq}, X)$, $\delta_2(X_{pq}, X)$. В силу уже цитированной теоремы Кервера — Милнора индекс самопересечения соответствующего класса $2(\xi_1 + \xi_2) + \delta_1\eta_1 + \delta_2\eta_2$ делится на 16, так что $i(X) - i(X_{pq}) \equiv 0 \bmod 16$. Таким образом, $i(X) = 0, \pm 4 \bmod 16$ *.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
10 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Whitney, Lectures in Topology, 1941. [2] Д. Гильберг, С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, 1936. [3] M. Mahowald, Pacif. J. Math., **14**, № 4, 1335 (1964). [4] W. S. Massey, Proc. Am. Math. Soc., **13**, № 6, 938 (1962). [5] Б. Д. Малый, Матем. заметки, **5**, № 1 (1969). [6] M. A. Kervaire, J. W. Milnor, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **47**, № 10, 1651 (1961). [7] W. F. Massey, Pacif. J. Math., **31**, 143 (1969).

* *Примечание при корректуре.* 1. Недавно Масси ([7]) доказал гипотезу Уитни в полном объеме: если $f: N_k \to R^4$ — вложение, то $x(f)$ совпадает с одним из чисел $-2k$, $-2k+4$, $\ldots$, $2k$. 2. В настоящее время автором доказано, что если X — гладкое замкнутое 4-мерное многообразие с $H_1(X) = 0$, двумерным числом Бетти b и сигнатурой σ, то род гладкой поверхности, реализующей делящийся на $m \geqslant 2$ элемент ξ группы $H_2(X)$, не может быть меньше чем $|(m+1)\xi\xi / 6m - \sigma / 2| - b / 2$ ($\xi\xi$ — индекс самопересечения). В частности, в $\mathbf{C}P^2$ гладкими сферами реализуются только образующие и удвоенные образующие $H_2(P_2C)$, а в $S^2 \times S^2$ класс $p\xi + q\eta$ с $p \neq 0$, $q \neq 0$ заведомо не реалируются гладкой сферой, если p и q не взаимно просты (ξ и η — естественные образующие $H_2(S^2 \times S^2)$). Аналогичная оценка имеется для рода неориентируемой гладкой поверхности в X, и гипотеза Уитни есть не что иное, как специальный случай этой общей оценки ($X = S^4$). Впрочем, для $\mathbf{R}P_2$ справедливость гипотезы Уитни очевидным образом следует из только что сформулируемой теоремы для $S^2 \times S^2$ и редукции п. 2.