Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 539.12.01 ***ФИЗИКА***

Ю. Б. РУМЕР

АТОМ ВОДОРОДА И КОНФОРМНАЯ ГРУППА

(Представлено академиком С. Т. Беляевым 14 VII 1969)

Цель настоящей заметки — наиболее прямым путем выразить уравнение Шредингера для атома водорода через генераторы L_{ab} конформной группы, удовлетворяющие соотношениям перестановок:

$$\begin{gathered} a, b = 0, 1, 2, 3; 5, 6, \\ g_{ab} = +, -, -, -; -+, \\ [L_{ab}, L_{cd}] = i(g_{ad}L_{bc} + g_{bc}L_{ad} - g_{ac}L_{bd} - g_{bd}L_{ac}). \end{gathered} \tag{1}$$

15 генераторов L_{ab} включают, помимо генераторов $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}$ (группа Лоренца), $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, еще 9 генераторов $L_{\mu 5}$, $L_{\mu 6}$, L_{56}, из которых составляются операторы сдвига Π_μ, специально конформного преобразования K_μ и дилатации D:

$$\Pi_\mu = L_{\mu 6} + L_{\mu 5}, \quad K_\mu = L_{\mu 6} - L_{\mu 5}, \quad D = L_{56}. \tag{2}$$

Преобразования производятся в три этапа.

1. Перейдем к представлению Гейзенберга

$$L_{ab}(\Pi, y) = \exp(-iy_\sigma \Pi_\sigma) L_{ab} \exp(iy_\sigma \Pi_\sigma),$$

где $y = (y_0, \mathrm{y})$ координаты и, разложим $L_{ab}(\Pi, y)$ в ряд Маклорена

$$L_{ab}(\Pi, y) = L_{ab} + (-i) y_\nu [\Pi_\nu, L_{ab}] + {}^1/_2 (-i)^2 y_\mu y_\nu [\Pi_\mu [\Pi_\nu L_{ab}]] + \ldots \tag{3}$$

По формулам (1) и (2) вычисляем

$$\begin{gathered} [\Pi_\sigma, M_{\mu\nu}] = i(g_{\sigma\mu}\Pi_\nu - g_{\sigma\nu}\Pi_\mu), \quad [\Pi_\sigma, D] = -i\Pi_\sigma, \\ [\Pi_\sigma, K_\mu] = -2i(g_{\sigma\mu}D + M_{\sigma\mu}), \\ [\Pi_\tau, [\Pi_\sigma, K_\mu]] = 2(g_{\tau\sigma}\Pi_\mu - g_{\sigma\mu}\Pi_\tau - g_{\tau\mu}\Pi_\sigma), \end{gathered} \tag{4}$$

и по формуле (3) получаем

$$\begin{gathered} M_{\mu\nu}(\Pi, y) = M_{\mu\nu} + y_\mu \Pi_\nu - y_\nu \Pi_\mu, \\ K_\mu(\Pi, y) = K_\mu + 2y_\sigma (M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}D) + 2y_\mu (y_\sigma \Pi_\sigma) - (y_\sigma y_\sigma)\Pi_\mu, \\ D(\Pi, y) = D - y_\sigma \Pi_\sigma. \end{gathered} \tag{5}$$

Как показывает выражение для $M_{\mu\nu}(\Pi, y)$, разложение (3) обобщает хорошо известное разложение полного момента количества движения на спиновую и орбитальную части.

Нас специально интересует генератор $K_0(\Pi, y)$ (действующий на скалярный базис, состоящий из решений $\varphi(y)$ уравнения Даламбера, разлагающихся по гармоникам положительной частоты). Имеем из (5)

$$K_0(\Pi, y)\varphi(y) = [2y_0(y_\sigma \Pi_\sigma) - (y_\sigma y_\sigma)\Pi_0]\varphi(y). \tag{6}$$

2. Выполним теперь каноническое преобразование:

$$y \to -P, \quad \Pi \to x, \quad \varphi(y) \to \psi(x), \tag{7}$$

наложив на новые координаты x и новый базис $\psi(x)$ следующие условия:

$$\begin{aligned}(x_\sigma x_\sigma) &= 0,\\ P_0\psi(x) &= -y_0\psi(x) = 0,\\ \Pi_0\psi(x) &= x_0\psi(x) = r\psi(x),\end{aligned} \tag{8}$$

где $r = \sqrt{(\mathbf{xx})}$, $\psi(x) = \tilde{\varphi}(r, \mathbf{x})$, знак $\sim$ означает преобразование Фурье:

$$\varphi(y) = \int \frac{\tilde{\varphi}(r, \mathbf{x})}{2r} e^{i(y_0 r - \mathbf{yx})} d^3x. \tag{9}$$

Мы получим в силу (8)

$$\tilde{K}_0(P, x)\psi(x) = \{2(x_0P_0 - (\mathbf{xP}))P_0 - x_0(P_0^2 - \mathbf{P}^2)\}\psi(x) = r\mathbf{P}^2\psi(x), \tag{10}$$

$$\tilde{\Pi}_0(x)\psi(x) = r\psi(x).$$

Легко видеть, что, поскольку $P_0\psi(x) = 0$, порядок сомножителей в (10) безразличен. Операторы K_0 и Π_0, перенесенные на пространство $\psi(x)$, обозначены через $\tilde{K}_0$ и $\tilde{\Pi}_0$. Эти операторы эрмитовы, если метрика определена как

$$(\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})) = \frac{\overset{*}{\psi}(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})}{r} d^3x.$$

3. Уравнение Шредингера $\left(\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 - \frac{e^2}{r} - E\right)\psi(\mathbf{x}) = 0$ умножением на $2mr$ приведем к виду

$$\{r\mathbf{P}^2 - (2mE)r - 2me^2\}\psi(\mathbf{x}) = 0. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражения (10), получим

$$\{\tilde{K}(P, x) - 2mE\tilde{\Pi}(x) - 2me^2\}\psi(\mathbf{x}) = 0 \tag{11а}$$

или, используя (2) и опуская аргументы у $\tilde{L}_{ab}(P, x)$,

$$\{\tilde{L}_{06}(1-2mE) - \tilde{L}_{05}(1 + 2mE) - 2me^2\}\psi = 0, \tag{11б}$$

что и решает поставленную задачу. Уравнение (11б) есть динамическое уравнение для атома водорода в теории конформной группы, соответствующее уравнению Шредингера. Для вычисления собственных значений, следуя работам ([1, 2]), произведем каноническое преобразование $\tilde{L}_{ab} \to \tilde{\tilde{L}}_{ab}$ (так называемое «тильт»-гиперболическое вращение в плоскости 5—6)

$$\tilde{L}_{06} = \tilde{\tilde{L}}_{06}\,\mathrm{ch}\,\xi + \tilde{\tilde{L}}_{05}\,\mathrm{sh}\,\xi, \quad \tilde{L}_{05} = \tilde{\tilde{L}}_{06}\,\mathrm{sh}\,\xi + \tilde{\tilde{L}}_{05}\,\mathrm{ch}\,\xi.$$

Подставляя в (11б), получим

$$\begin{aligned}\{\tilde{\tilde{L}}_{06}[(1-2\,mE)\,\mathrm{ch}\,\xi - (1 + 2mE)\,\mathrm{sh}\,\xi] - 2me^2 -\\ - \tilde{\tilde{L}}_{05}[(1-2\,mE)\,\mathrm{sh}\,\xi - (1 + 2mE)\,\mathrm{ch}\,\xi]\}\psi = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

При $\mathrm{th}\,\xi = (1 + 2mE)/(1-2mE)$ исчезает коэффициент при $\tilde{\tilde{L}}_{05}$, и мы получаем

$$\{\tilde{\tilde{L}}_{06}[(1-2mE)^2 - (1 + 2mE)^2]^{1/2} - 2me^2\}\psi = 0.$$

Компактный генератор $\tilde{\tilde{L}}_{06}$ имеет дискретные собственные значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, откуда получаем дискретный спектр

$$E = -\frac{1}{2n^2} m^2e^4 \quad (E < 0,\ \hbar = 1).$$

При $\operatorname{th}\xi = (1-2mE)/(1+2mE)$ исчезает коэффициент при L_{06}, и мы получим

$$\{\tilde{\tilde{L}}_{05}[(1-2mE)^2-(1+2mE)^2]^{1/2}+2me^2\}\psi = 0.$$

Некомпактный генератор $\tilde{\tilde{L}}_{05}$ имеет непрерывный спектр $i\nu$, где $0 < \nu < \infty$, откуда получаем

$$E = \frac{1}{2\nu^2} m^2e^4 \quad (E > 0,\ \hbar = 1).$$

Новосибирский государственный университет

Поступило 7 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Y. Nambu, Proc. 13th Intern. Conf. on High-Energy Physics, Berkeley, 1966, Berkeley, 1967, p. 355. [2] C. Fronsdal, Phys. Rev., 156, 1665 (1967).