Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 517.944 **МАТЕМАТИКА**

И. Б. СИМОНЕНКО

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 18 VII 1969)

В данной работе метод осреднения Н. Н. Боголюбова [1] применен к абстрактным параболическим уравнениям вида

$$dx/dt = Ax + f(x, \omega t), \tag{1}$$

где A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, порождающий аналитическую полугруппу.

Предполагается, что: 1) $-A$ — позитивный оператор, обладающий вполне непрерывным обратным *.

2) f — непрерывное отображение пространства B^α ($\alpha \in [0, 1)$) в пространстве B^ε ($\varepsilon > 0$). Через B^α обозначено банахово пространство, являющееся областью определения оператора $(-A)^\alpha$.

3) Дифференциал Фреше по первой переменной существует и осуществляет непрерывное отображение Df пространства $B^\alpha \times [0, +\infty)$ в пространство $\mathrm{Hom}(B^\alpha, B^\varepsilon)$. (Так мы обозначаем пространство линейных ограниченных операторов, действующих из пространства B^α в пространство B^ε с топологией равномерной сходимости.) Для каждого ограниченного в B^α множества K отображение Df равномерно непрерывно и ограничено на подмножестве $K \times [0, +\infty)$.

4) Множество, где $\mathrm{Hom}(B^\alpha, B^\varepsilon)$-сходится интеграл

$$(D_N f)(x) = \frac{1}{N}\int_0^N Df(x, t)\, dt \quad (N \mapsto +\infty),$$

всюду плотно в B^α.

5) Существует такой элемент x ($\in B^\alpha$), что B^ε-сходится интеграл

$$F_N x = \frac{1}{N}\int_0^N f(x, t)\, dt \quad (N \to \infty),$$

и существует постоянная M такая, что $\|f(x, t)\|_{B^\varepsilon} \leqslant M$ для всех $t \geqslant 0$. Предел $F_N x$ обозначим через Fx.

1°. Рассмотрим две задачи Коши

$$dx/dt = Ax + f(x, \omega t), \quad x|_{t=0} = x_0, \quad \omega > 0; \tag{2}$$

$$dy/dt = Ay + Fy, \quad y|_{t=0} = x_0. \tag{3}$$

Относительно начальных данных предположим, что $x_0 \in B^\beta$, $\alpha < \beta < 1$. Решение будем искать в классе $C_{[0, t_0]}(B^\beta)$. Так обозначается пространство непрерывных отображений сегмента $[0, t_0]$ в пространстве B^β. Уравнения удовлетворяются при $t \in (0, t_0]$.

В такой постановке задачи (2), (3) могут иметь лишь единственное решение. Разрешимость, вообще говоря, имеет место лишь в малом, т. е. для малых t_0.

---

* Мы без дополнительных оговорок пользуемся понятиями теории полугрупп и дробных степеней оператора [2, 3]. Заметим также, что условие позитивности оператора $-A$ несущественно, так как для любого оператора A, порождающего аналитическую полугруппу, существует такое число $\lambda (>0)$, что $\lambda I - A$ позитивен, и мы можем A заменить на $\lambda I - A$, включив λI в f.

2⁰. Теорема 1. *Если задача* (3) *разрешима, то существует такое число* ω_0, *что при* $\omega > \omega_0$ *разрешима и задача* (2). *При этом*

$$\lim_{\omega\to+\infty} \|x - y\|_{C_{[0,\, t_0]}(B)} = 0.$$

3⁰. Теорема 2. *Пусть* $\overset{\circ}{y}$ — *стационарное решение уравнения* (3) *и отображение* f *T-периодическое по второй переменной* ($f(x, t+T) = f(x, t)$).

Обозначим через Λ *спектр оператора* $A + DF(\overset{\circ}{y})$, $r(\Lambda) = \max\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Re}\lambda$.

Предположим, что спектр Λ *не содержит нуля.*

Тогда:

1) *Стационарному решению* $\overset{\circ}{y}$ *при больших частотах соответствует единственное* $\omega^{-1}T$*-периодическое решение уравнения** (2), *т. е. существуют такие числа* $\varepsilon(>0)$, ω_ε, *что при условии* $\omega > \omega_\varepsilon$ *существует единственное* $\omega^{-1}T$*-периодическое решение* $\overset{\circ}{x}$ *уравнения* (2), *удовлетворяющее неравенству*

$$\|\overset{\circ}{y} - \overset{\circ}{x}\|_{C_{[0,\, t_0]}(B^\beta)} < \varepsilon.$$

2) *Если весь спектр* Λ *расположен строго в левой полуплоскости, то указанное* $\omega^{-1}T$*-периодическое решение уравнения* (2) *асимптотически устойчиво при больших* ω. *Это означает, что для каждого* $\sigma \in (0, -r(\Lambda))$ *существуют такие числа* $\omega_0(>\omega_\varepsilon)$, c, $\varepsilon_1(>0)$, *что при* $\omega > \omega_0$ *для любых начальных данных* x_0 *из окрестности*

$$\|\overset{\circ}{y} - x_0\|_{B^\beta} < \varepsilon_1$$

решение x *задачи* (2) *существует на бесконечном промежутке времени и имеет место оценка*

$$\rho(t) = \|\overset{\circ}{x}(t) - x(t)\|_{B^\beta} \leqslant ce^{-\sigma t}\rho(0).$$

3) *Если спектр* Λ *имеет строго в правой полуплоскости хотя бы одну точку, то соответствующее периодическое решение уравнения* (2) *неустойчиво при больших* ω. *Это означает, что для каждого* $\sigma \in (0, r(\Lambda))$ *существуют числа* $\varepsilon_1(>0)$, $\omega_0(>\omega_\varepsilon)$, *последовательность* $t_n(>0)$ *и последовательность начальных данных* $x_0{}^n$, B^β*-сходящаяся к начальным данным* $\omega^{-1}T$*-периодического решения* $\overset{\circ}{x}$, *для которых задача* (2) *разрешима при* $\omega > \omega_0$ *на промежутке времени* $[0, t_n]$ *и выполняются неравенства*

$$\rho_n(t_n) \geqslant \varepsilon_1, \quad t_n \leqslant \frac{1}{\sigma}\ln\frac{\varepsilon_1}{\rho_n(0)}, \quad \rho_n(t) = \|x_n(t) - \overset{\circ}{x}(t)\|_{B^\beta}.$$

Здесь x_n — *решение задачи* (2) *с начальными данными* $x_0{}^n$.

4⁰. Доказательство теорем опирается на теорию полугрупп, дробных степеней оператора ([2], [3]) и теорию устойчивости в банаховых пространствах ([4]).

5⁰. Сформулированные теоремы содержат в себе новые результаты, например, для параболических уравнений (A-эллиптический оператор), для уравнений Навье — Стокса (в связи с производящим свойством главной части оператора ([5])).

Автор выражает признательность В. И. Юдовичу за полезное обсуждение работы.

Ростовский государственный
университет

Поступило
12 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы теории нелинейных колебаний, 1955. [2] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966. [3] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967. [4] М. Г. Крейн, Лекции по теории устойчивости дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, 1964. [5] В. И. Юдович, ДАН, 161, № 5, 1037 (1965).

* Когда мы говорим об уравнении, начальные условия опускаем.