Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 1

УДК 518.92

МАТЕМАТИКА

Э. Р. СМОЛЬЯКОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 18 VII 1969)

В n-мерном эвклидовом пространстве движение материальной точки подчиняется системе уравнений

$$R_i(y', y, u, v, t) \equiv y_i' - f_i(y, u, v, t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где u и v — элементы замкнутых множеств U и V соответственно. Пусть в каждый момент t игрок u выбирает u из U таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала

$$I = \int_{t_0}^{T} f_0(y, u, v, t)\, dt + \Phi[y(t_0), t_0, y(T), T], \tag{2}$$

удовлетворив краевым условиям

$$G_k[y(t_0), t_0, y(T), T] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{3}$$

Игрок v, выбирая v из V, стремится максимизировать I. Нас в основном будут интересовать случаи, когда такая игра не имеет цены в чистых стратегиях. При этом игра рассматривается «программная» (без синтеза). В качестве множеств U и V будем для наглядности изложения рассматривать замкнутые интервалы $[u_0, u_1]$, $[v_0, v_1]$ действительной оси. Результаты легко обобщаются на случай, когда U и V — любые конечномерные измеримые множества.

На σ-алгебре подмножеств открытого множества $S_u \supset U$ определим неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества $\varphi(i_u)$, $i_u \subset S_u$ Меру $\varphi(i_u)$ подчиним условиям: $\varphi(U) = 1$, $\varphi(S_u \setminus U) = 0$. Промежуток $[u_0, u_1]$ φ-измерим, как всякое замкнутое относительно S_u множество. Аналогично введем ψ-меру на открытом множестве $S_v \supset V$.

Производящие функции (функции точки) $\varphi(u, t)$, $\psi(v, t)$, мер $\varphi(i_u, t)$, $\psi(i_v, t)$ удовлетворяют следующим условиям: а) $\varphi(u, t)$, $\psi(v, t)$ не убывают; б) они полунепрерывны сверху в каждой точке $u \in S_u$, $v \in S_v$, в которой они определены; в) $\int_U d\varphi = \varphi(u_1 + 0, t) - \varphi(u_0 - 0, t) = 1$,

$$\int_V d\psi = \psi(v_1 + 0, t) - \psi(v_0 - 0, t) = 1,$$ причем интегралы понимаются

в смысле Лебега — Стилтьеса ([1, 2]).

Так как двум функциям точки, отличающимся на постоянную, соответствует одна и та же мера, то можно положить $\varphi(u_0 - 0, t) = \psi(v_0 - 0, t) = 0$. Функции точки $\varphi(u, t)$, $\psi(v, t)$, удовлетворяющие а) — в), можно принять за функции распределения случайных величин $u \in U$, $v \in V$.

Будем говорить, что игрок u применяет смешанную стратегию, если свое поведение в каждый момент t он организует в соответствии с функцией распределения $\varphi(u, t)$, заданной в каждый момент t на множестве его допустимых состояний $U \ni u$.

Теперь сформулируем следующую игру, более общую, чем (1) — (3). Пусть движение материальной точки подчиняется системе уравнений

$$\int_U \int_V R_i(y', y, u, v, t)\, d\varphi(u, t)\, d\psi(v, t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где R_i — функции из (1), причем $y_i(t)$, $i=1,\ldots,n$,— абсолютно непрерывны.

Игрок u стремится выбором функции $\varphi(u, t)$ минимизировать функционал

$$\overline{I} = \int_{t_0}^{T} \left[\int_U \int_V f_0(y, u, v, t)\, d\varphi(u, t)\, d\psi(v, t) \right] dt + \Phi \tag{5}$$

и удовлетворить краевым условиям (3). Игрок v, выбирая $\psi(v, t)$, желает максимизировать функционал (5). Естественно, предполагается, что $\varphi(u, t)$ и $\psi(v, t)$ удовлетворяют условиям а) — в), сформулированным выше.

В данной работе мы ограничимся функциями $f_i(y, u, v, t)$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$, $|i_t|_L$-измеримыми на (t_0, T), ограниченными, непрерывными по y, u, v и непрерывно дифференцируемыми по каждой из этих переменных (при этом предполагаются непрерывными смешанные производные до 3-го порядка) на $S_u \times S_v \times S_y$, где S_y — открытое множество допустимых значений $y(t)$. Такие функции, очевидно, интегрируемы по Лебегу — Стилтьесу, и результат интегрирования (например в (4)) не зависит от порядка интегрирования, что легко показать с помощью соответствующих теорем из ([1], [2]).

Назовем экстремумом в игре любой экстремум (в обычном смысле) из совокупности всех экстремумов, соответствующих поведению игроков, преследующих не только противоположные, но и общие цели (например, оба игрока стремятся минимизировать (5)). Необходимые условия экстремума в игре (3) — (5) получены методами, изложенными в ([3]). Всюду ниже интегралы рассматриваются в смысле Римана, если не оговорено противное.

Необходимые условия слабого экстремума даются соотношениями (6), (10), (11). Множители Лагранжа $\lambda_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\lambda_0 = \mathrm{const} \leqslant 0$, удовлетворяют уравнениям:

$$\lambda_k' = -\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left[\int_U \int_V f'''_{iuvy_k} \varphi\psi\, du\, dv - \int_U f''_{iuy_k}(v_1)\, \varphi\, du - \right.$$
$$\left. - \int_V f''_{ivy_k}(u_1)\, \psi\, dv + f'_{iy_k}(u_1, v_1) \right] \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{6}$$

Функции точки $\varphi(u, t)$, $\psi(v, t)$ при каждом t на открытых интервалах $(u_0, u_1) \subset U$, $(v_0, v_1) \subset V$ соответственно удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=0}^{n} \left[f_i(u_1, v) - \int_U f'_{iu} \varphi\, du \right]_{v_0}^{v_1} \lambda_i(t) = 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left[f_i(u, v_1) - \int_V f'_{iv} \psi\, dv \right]_{u_0}^{u_1} \lambda_i(t) = 0, \tag{8}$$

которые являются очень слабыми условиями экстремума, не имеющими аналога в вариационном исчислении и выполняющимися не на любых экстремалях.

При известных φ и ψ значения $u_{\text{ср}}(t)$, $v_{\text{ср}}(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(t) \left[\int_V f''_{iuv} \psi\, dv - f'_{iu}(v_1) \right] = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(t) \left[\int_U f''_{iuv} \varphi\, du - f'_{iv}(u_1) \right] = 0, \tag{9}$$

назовем средними управлениями.

Функции $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и

$$\mathscr{H}(\lambda(t), y(t), t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i' + \lambda_0 \int_U \int_V f_0\, d\varphi\, d\psi$$

(здесь интегралы в смысле Лебега — Стилтьеса) непрерывны всюду на интервале (t_0, T) кроме его концов, в которых выполняются соотношения

$$-[\mathcal{H}]^{t_0} = -\lambda_0\Phi'_{t_0} + \sum_{k=1}^{p} l_k G'_{kt_0}, \quad [\mathcal{H}]^{T} = -\lambda_0\Phi'_{T} + \sum_{k=1}^{p} l_k G'_{kt}, \tag{10}$$

$$\lambda_i(t_0) = -\lambda_0\Phi'_{y_i(t_0)} + \sum_{k=1}^{p} l_k G'_{ky_i(t_0)}, \tag{11а}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$-\lambda_i(T) = -\lambda_0\Phi'_{y_i(T)} + \sum_{k=1}^{p} l_k G_{ky_i(T)}, \tag{11б}$$

где l_k — некоторые постоянные.

(6) и (11б) используются при выводе следующего условия сильного экстремума (необходимого условия существования цены в игре (3) — (5)):

$$\max_{\bar\varphi}\min_{\bar\psi}\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[\int_U\int_V f''_{iuv}\bar\varphi\bar\psi\,du\,dv - \int_U f'_{iu}(v_1)\,\bar\varphi\,du - \int_V f'_{iv}(u_1)\,\bar\psi\,dv\right]\lambda_i(t)\right\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left[\int_U\int_V f''_{iuv}\varphi\psi\,du\,dv - \int_U f'_{iu}(v_1)\,\varphi\,du - \int_V f'_{iv}(u_1)\,\psi\,dv\right]\lambda_i(t) \tag{12}$$

(при этом предполагается, что $\max\limits_{\bar\varphi}\min\limits_{\bar\psi}\{\cdot\} = \min\limits_{\bar\psi}\max\limits_{\bar\varphi}\{\cdot\}$).

З а м е ч а н и е. Если интегральные уравнения (9) имеют решения относительно $\varphi(u, t)$ и $\psi(v, t)$, содержащие оптимальное, то в этом случае вместо (12) получаем следующие условия, позволяющие расщеплять игровую задачу на отдельные вариационные:

$$\max_{\bar\varphi}\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[\int_V\left(\int_U f''_{iuv}\bar\varphi\,du - f'_{iv}(u_1)\right)\psi\,dv - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_U f'_{iu}(v_1)\,\bar\varphi\,du\right]\lambda_i(t)\right\} = -\sum_{i=0}^{n}\left[\int_U f'_{iu}(v_1)\,\varphi\,du\right]\lambda_i(t), \tag{12а}$$

$$\min_{\bar\psi}\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[\int_U\left(\int_V f''_{iuv}\bar\psi\,dv - f'_{iu}(v_1)\right)\varphi\,du - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_V f'_{iv}(u_1)\,\bar\psi\,dv\right]\lambda_i(t)\right\} = -\sum_{i=0}^{n}\left[\int_V f'_{iv}(u_1)\,\psi\,dv\right]\lambda_i(t). \tag{12б}$$

Вследствие слабости условий (7), (8), даже при невыполнении условий замечания, игровые задачи могут переходить во столько независимых вариационных задач, какова размерность множества $U \times V$, что подтверждает следующий пример.

П р и м е р. Пусть движение материальной точки в пространстве $\{y, t\}$ подчиняется уравнению

$$y' = (v - u)^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{13}$$

при начальном условии $y(0) = y^0$ и свободном правом конце $y(T)$, T фиксировано. При этом $u \in U = [0, 1]$, $v \in V = [0, 1]$. Игрок, u, выбирая $u(t)$, стремится минимизировать функционал,

$$I = \int_0^T y\,dt, \tag{14}$$

а игрок v, наоборот,— сделать его как можно больше соответствующим выбором $v(t)$. Как показал Берковиц ([4]), в данной игре не существует цены в чистых стратегиях. Найдем решение этой игры в смешанных стратегиях, используя полученные выше результаты. Сформулируем вспомогательную задачу вида (3) — (5), заменив уравнение (13) следующим:

$$y' = \int\limits_U \int\limits_V (v-u)^2 \, d\varphi \, d\psi$$

(интегралы в смысле Лебега — Стилтьеса).

Поведение игрока u определяется через функцию $\varphi(u, t)$, а игрока v — через $\psi(v, t)$. Из (6) и (11б) находим $\lambda(t) = t - T \leqslant 0$. Условия (7) — (9) дают

$$\int\limits_0^1 \varphi \, du = 0{,}5, \quad \int\limits_0^1 \psi \, dv = 0{,}5. \tag{15}$$

Если в (12) подставить (15), то (12) распадается на два условия (подстановка возможна именно вследствие слабости (15)):

$$\max_{\bar\varphi} \left[\int\limits_0^1 u\bar\varphi \, du \right] = \int\limits_0^1 u\varphi \, du, \quad \min_{\bar\psi} \left[\int\limits_0^1 v\bar\psi \, dv \right] = \int\limits_0^1 v\psi \, dv.$$

Итак, игра в смешанных стратегиях свелась к двум следующим вариационным задачам.

З а д а ч а 1. Найти неубывающую функцию $\varphi(u, t)$ и соответствующую траекторию $z(u, t)$, удовлетворяющие связям $z_u' = \varphi(u, t)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $z(0) = 0$, $z(1) = 0{,}5$ и доставляющие минимум функционалу $I_1 = -\int\limits_0^1 u\varphi \, du$.

З а д а ч а 2. Найти неубывающую функцию $\psi(v, t)$ и траекторию $z(v, t)$, удовлетворяющие связям $z_v' = \psi(v, t)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $z(0) = 0$, $z(1) = 0{,}5$ и доставляющие минимум функционалу $I_2 = \int\limits_0^1 v\psi \, dv$.

Решениями задач 1, 2 являются функции

$$\varphi(u, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0{,}5, \\ 1 & \text{при } u \geqslant 0{,}5; \end{cases} \qquad \psi(v, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } v < 0, \\ 0{,}5 & \text{при } 0 \leqslant v < 1, \\ 1 & \text{при } v \geqslant 1. \end{cases}$$

Так как φ-мера точки $u = 0{,}5$ есть 1, то, следовательно, $u_{\text{ср}}(t) = 0{,}5$, удовлетворяющее (9), есть оптимальная стратегия для игрока u. Оптимальным поведением для игрока v будет выбор в каждый момент t значений $v = 1$ и $v = 0$ с вероятностью 0,5 (т. е. v надо в каждый момент t на траектории «бросать монетку»). Легко проверяется, что полученное поведение игроков приводит к седловой точке в игре (13) — (14).

Поступило
11 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, Общая теория, М., 1962. [2] Э. Камке, Интеграл Лебега — Стилтьеса М., 1959. [3] Э. Р. Смольяков, Диссертация, Некоторые вариационные задачи динамики полета космических аппаратов, Институт прикладной математики АН СССР, 1968. [4] Advances in Game Theory, № 52, 1964.