Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 2

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

ЧИСЛО СУСЛИНА И МОЩНОСТЬ, ХАРАКТЕРЫ ТОЧЕК В СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ БИКОМПАКТАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 X 1969)

Обозначения и определения, используемые здесь, объясняются в ([1, 2, 4–7]). Специально отметим следующее. Из топологических пространств принимаются во внимание лишь хаусдорфовы, из кардинальных чисел — только бесконечные. Последние обозначаются символами λ, τ. Характер множества A в пространстве X есть $\chi(A, X) = \min\{|B|: B$ — база A в $X\}$, причем база A в X — семейство открытых множеств, содержащее сколь угодно тесные окрестности A. Если $x \in X$, то $\chi(x, X) = \chi(\{x\}, X)$. Характер пространства X есть $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X): x \in X\}$ *. Сочетание (G.C.H.) означает, что предполагается выполненной обобщенная континуум-гипотеза. Через $|\alpha|$ обозначается мощность множества, вполне упорядоченного по типу α. Если M — множество, то $\exp M = \{A: A \subset M\}$ и $\exp_\tau M = \{A: A \subset M$ и $|A| \leqslant \tau\}$.

Определение 1. Высотой $h(x, X)$ пространства X в точке x называется $\min\{\chi(F, X): x \in F \subset X, F$ — бикомпакт$\}$.

Определение 2. Высота $h(X)$ пространства X есть $\sup\{h(x, X): x \in X\}$.

Определение 3. Битеснота $bt(X)$ пространства X есть наименьшее из таких τ, что если $M \subset X$ и $[M] \neq M$, то существуют $x \in X \setminus M$ и семейство $\lambda \subset \exp_\tau M$, для которых: а) $|\lambda| \leqslant \tau$ и б) $\{x\} = \bigcap\{[P]: P \in \lambda\}$.

Определение 4. Расходимость $\operatorname{div}(X)$ пространства X есть наименьшее τ такое, что для каждого незамкнутого в X множества M существуют $x \in [M] \setminus M$ и сходящееся ** к x центрированное семейство $\xi \subset \exp_\tau M$, для которого $|\xi| \leqslant \tau$.

Предложение 1. $t(X) \leqslant bt(X) \leqslant \operatorname{div}(X) \leqslant \chi(X)$ ***.

Предложение 2. *Если Y — фактор-пространство пространства X, то* $\operatorname{div}(Y) \leqslant \operatorname{div}(X)$.

Лемма 1. *Если $A \subset X$, то $|[A]| \leqslant |A|^{bt(X)}$.*

Доказательство. Будем считать, что A бесконечно. Положим $bt(X) = \tau$. Определим по трансфинитной индукции для каждого порядкового числа α, меньшего чем τ^+, множество A_α следующим образом: $A_0 = A$; если A_α определено, то $A_{\alpha+1} = \{x \in X$: существует $\lambda \in \exp_\tau(\exp_\tau A)$, для которого $\{x\} = \bigcap\{[P]: P \in \lambda\}$; если β — предельное порядковое число и множества A_α определены для всех $\alpha < \beta$, то $A_\beta = \bigcup\{A_\alpha: \alpha < \beta\}$. Покажем, что: I. $|A_\alpha| \leqslant |A|^\tau$ для всех $\alpha < \tau^+$ и II. $\bigcup\{A_\alpha: \alpha < \tau^+\}$ — замкнутое множество.

Предположим, что соотношение I не верно, и пусть α_0 — первый трансфинит, для которого оно нарушается. Тогда $\alpha_0 > 0$, ибо $|A_0| = |A| \leqslant |A|^\tau$. Трансфинит α_0 не может быть предельным — в противном случае $|A_{\alpha_0}| \leqslant$

---

* Если M — множество кардинальных чисел, то $\sup M$ — наименьшее из кардинальных чисел, не меньших каждого элемента M.

** Семейство ξ сходится к точке x, если каждая окрестность точки x содержит некоторый элемент семейства ξ.

*** Легко доказывается, что слабая теснота $t_c(X)$ и теснота $t(X)$ в смысле работы ([2]) совпадают всегда. Поэтому $t(X) = t_c(X) \leqslant bt(X)$.

$\leqslant \Sigma\{|A_\alpha|: \alpha < \alpha_0\} \leqslant |A|^\tau$, так как $|\alpha_0| < \tau^+ \leqslant |A|^\tau$ и $|A_\alpha| \leqslant |A|^\tau$ для всех $\alpha < \alpha_0$ в силу выбора α_0. Значит, $\alpha_0 = \alpha' + 1$. Но $|A_{\alpha'}| \leqslant |A|^\tau$. Известно, что для любого множества B мощность семейства $\exp_\tau B$ не превосходит $|B|^\tau$ ([9]). Поставим в соответствие каждой точке $x \in A_{\alpha'+1}$ некоторое семейство $\lambda(x)$ подмножеств множества $A_{\alpha'}$, для которого $|\lambda(x)| \leqslant \tau$, $|\bigcup\{P: P \in \lambda(x)\}| \leqslant \tau$ и $\{x\} = \bigcap\{[P]; P \in \lambda(x)\}$. Очевидно, этим определено взаимно однозначное отображение множества $A_{\alpha'+1}$ во множество $\exp_\tau(\exp_\tau A_{\alpha'})$. Значит, $|A_{\alpha'+1}| \leqslant |\exp_\tau(\exp_\tau A_{\alpha'})| \leqslant (|A_{\alpha'}|^\tau)^\tau \leqslant |A|^\tau$. Соотношение I доказано.

Предположим теперь, что соотношение II не верно, т. е. что множество $C = \bigcup\{A_\alpha: \alpha < \tau^+\}$ не замкнуто. Существуют тогда точка $z \notin C$ и семейство $\mu \in \exp_\tau(\exp_\tau C)$ такие, что $\{z\} = \bigcap\{[P]: P \in \mu\}$. Очевидно, для некоторого $\alpha^* < \tau^+$, тогда $\bigcup\{P, P \in \mu\} \subset \bigcup\{A_\alpha: \alpha < \alpha^*\} \subset A_{\alpha^*}$. Из определения множества A_{α^*+1} следует теперь, что $z \in A_{\alpha^*+1}$,— противоречие. Значит, C — замкнутое множество. При этом, в силу I, $|C| \leqslant \tau^+|A|^\tau \leqslant |A|^\tau$. Но $A = A_0 \subset C$; следовательно, $[A] \subset C$ и $|[A]| \leqslant |A|^\tau$. Лемма 1 доказана.

Нам понадобятся следующие два утверждения:

VI (транзитивность характера). *Если $X_2 \subset X_1 \subset X$, где X_2 и X_1 — бикомпакты, то* $\chi(X_2, X) \leqslant \chi(X_2, X_1) + \chi(X_1, X)$ ([3]).

VII. *Если X τ^--компактно, $bt(X) \leqslant \tau$ и $\chi(X) \leqslant 2^\tau$, то $|X| \leqslant 2^\tau$.*

Утверждение VII очевидным образом выводится из основной теоремы 2 работы ([1]) при посредстве леммы 1.

Лемма 2 (основная). *Пусть X — бикомпакт, $t(x, X) < \tau \leqslant \lambda$ для каждой точки $x \in X$, и кардинальное число τ регулярно. Пусть, далее, из $A \subset X$ и $|A| < \tau$ следует для любого $A \subset X$, что $|[A]| < \lambda$. Тогда существует замкнутое в X множество B, для которого $\chi(B, X) < \tau$ и $0 < |B| < \lambda$.*

Лемма 3. *Каждое непустое открытое подмножество регулярного пространства содержит непустое замкнутое в этом пространстве множество типа G_δ.*

Доказательство леммы 2. Если $|X| < \lambda$, утверждение очевидно. Если $|X| \geqslant \lambda$, можно осуществить построение по трансфинитной индукции, в результате которого каждому $\alpha < \tau$ будет поставлена в соответствие точка $x(\alpha)$ так, что множество $\{x(\alpha): \alpha < \tau\}$, вполне упорядоченное в соответствии с порядком трансфинитов, окажется свободной последовательностью длины τ ([1]). Параллельно будут определяться непустые замкнутые множества $F(\alpha)$.

В качестве $x(0)$ выберем любую точку множества X. Примем за $F(0)$ какое-нибудь непустое замкнутое в X множество типа G_δ, не содержащее точки $x(0)$. Пусть $\alpha_0 < \tau$ и для каждого $\alpha < \alpha_0$ уже определены точка $x(\alpha)$ и непустое замкнутое множество $F(\alpha) \subset X$ так, что $\chi(F(\alpha), X) \leqslant |\alpha| + \aleph_0$, и если $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_0$, то $F(\alpha_1) \supset F(\alpha_2)$. Введем обозначение $A(\alpha_0) = \{x(\alpha): \alpha < \alpha_0\}$. Тогда $|A(\alpha_0)| \leqslant |\{\alpha: \alpha < \alpha_0\}| < \tau$, и поэтому $|[A(\alpha_0])| < \lambda$. Положим $B(\alpha_0) = \bigcap\{F(\alpha): \alpha < \alpha_0\}$. Если $|B(\alpha_0)| < \lambda$, то $B(\alpha_0)$ — искомое множество, ибо $\{F(\alpha): \alpha < \alpha_0\}$ — центрированное семейство непустых замкнутых в X множеств, X — бикомпакт, характер и псевдохарактер замкнутого множества в бикомпакте совпадают и $\Sigma\{|\alpha|: \alpha < \alpha_0\} \leqslant |\alpha_0| + \aleph_0 < \tau$. Если $|B(\alpha_0)| \geqslant \lambda$, то $B(\alpha_0) \setminus [A(\alpha_0)] \neq \Lambda$. Примем за $x(\alpha_0)$ какую-нибудь точку множества $B(\alpha_0) \setminus [A(\alpha_0)]$. Определим $F(\alpha_0)$ как какое-нибудь непустое замкнутое в X множество, содержащееся в $B(\alpha_0) \setminus ([A(\alpha_0)] \cup \{x(\alpha_0)\})$, типа G_δ в $B(\alpha_0)$. В силу VI $\chi(F(\alpha_0), X) \leqslant \chi(B(\alpha_0), X) + \aleph_0 \leqslant |\alpha_0| + \aleph_0$.

Покажем, что описанный процесс определения точек $x(\alpha)$ и множеств $F(\alpha)$ при любой его реализации остановится на некотором трансфините, меньшем чем τ. От реализации зависит только, какой именно трансфинит $\alpha^* < \tau$ окажется препятствующим. Для этого α^* тогда $|B(\alpha^*)| < \lambda$ и $\chi(B(\alpha^*), X) \leqslant |\alpha| + \aleph_0 < \tau$, откуда следует, что $B(\alpha^*)$ — искомое множество. Предположим, однако, что множества $F(\alpha)$ и точки $x(\alpha)$ удалось определить для всех $\alpha < \tau$. Положим $A = \{x(\alpha): \alpha < \tau\}$ и $x(\alpha_1) < x(\alpha_2)$ в том и только в том случае, если $\alpha_1 < \alpha_2$. При $\alpha_1 \neq \alpha_2$ $x(\alpha_1) \neq x(\alpha_2)$. Значит, $|A| = \tau$. В силу построения, если $\alpha_0 < \tau$, то $[\{x(\alpha): \alpha \leqslant \leqslant \alpha_0\}] \cap F(\alpha_0) = \Lambda$, и если $\beta > \alpha_0$, то $x(\beta) \in F(\alpha_0)$. Поэтому $[\{x(\alpha): \alpha \leqslant \alpha_0\}] \cap [\{x(\beta): \alpha_0 < \beta\}] \subset [\{x(\alpha): \alpha \leqslant \alpha_0\}] \cap F(\alpha_0) = \Lambda$. Тем самым доказано, что $A, <$ — свободная последовательность длины τ. Но тогда некоторая точка $y \in X$ является точкой полного накопления для A. Теперь нужна простая (см. ([1]))

Лемма 4. *Если теснота в каждой точке топологического пространства X меньше чем τ и τ — регулярное кардинальное число, то в X нет точки полного накопления ни для какой свободной последовательности длины τ.*

Лемма 5. *Пусть выполняются все посылки леммы 2. Тогда существует семейство γ попарно не пересекающихся замкнутых в X множеств такое, что $[\bigcup\{P: P \in \gamma\}] = X$ и для каждого $P \in \gamma$ $\chi(P, X) < \tau$ и $0 < |P| < \lambda$.*

Лемма 5 легко доказывается на основании принципа Куратовского — Цорна.

Определение 5. Семейство $\mathscr{E} = \{\gamma_\alpha: \alpha \in M\}$ семейств подмножеств множества X называется хаусдорфовым, если для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in M$, где $\alpha_1 \neq \alpha_2$, существуют $P_1 \in \gamma_{\alpha_1}$ и $P_2 \in \gamma_{\alpha_2}$ такие, что $P_1 \cap P_2 = \Lambda$. Семейство γ множеств называется предфильтром, если из $P' \in \gamma$, $P'' \in \gamma$ следует, что существует $P \in \gamma$, для которого $P \subset P' \cap P''$.

Лемма 6. *Пусть $\mathscr{E} = \{\gamma_\alpha: \alpha \in M\}$ — хаусдорфово семейство предфильтров в X, причем $|M| > 2^\tau$ и $|\gamma_\alpha| \leqslant \tau$ для каждого $\alpha \in M$. Тогда существуют множество $M' \subset M$ и такие $P_\alpha \in \gamma_\alpha$ для каждого $\alpha \in M'$, что $|M'| > \tau$ и семейство $\{P_\alpha: \alpha \in M'\}$ дизъюнктно.*

Лемма 6 легко вытекает из леммы 6 работы ([4]). Очевидны леммы 7 и 8.

Лемма 7. *Если $x \in U \subset X$, где U открыто в X и $h(x, X) \leqslant \tau$, то существует бикомпакт $\Phi \subset X$, для которого $x \in \Phi \subset U$ и $\chi(\Phi, X) \leqslant \tau$.*

Лемма 8. *Если $h(X) \leqslant \tau$, то существует дизъюнктное семейство S бикомпактных подмножеств пространства X такое, что (j_1): $[\bigcup\{F: F \in \in S\}] = X$ и (j_2): $\chi(F, X) \leqslant \tau$ для каждого $F \in S$.*

Лемма 9. *Если X — бикомпакт и $bt(X) \leqslant \tau$, то существует дизъюнктное семейство γ замкнутых в X множеств такое, что: (k_1): $[\bigcup\{P: P \in \gamma\}] = X$; (k_2): если $P \in \gamma$, то $|P| \leqslant 2^\tau$, и (k_3): $\chi(P, X) \leqslant \tau$ для всех $P \in \gamma$.*

Доказательство. Выполняются все посылки леммы 2 по отношению к пространству X и кардинальным числам τ^+ в роли τ и $(2^\tau)^+$ в роли λ, так как τ^+ регулярно, $t(X) \leqslant bt(X) < \tau^+$, и если $A \subset X$, $|A| < \tau^+$, то $|A| \leqslant \tau$ и $|[A]| \leqslant \tau^\tau = 2^\tau < (2^\tau)^+ = \lambda$ в силу леммы 1. Поэтому применима лемма 5. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Если F замкнуто в X, то $bt(F) \leqslant bt(X)$.*

Теорема 1. $|X| \leqslant 2^{bt(X)+c(X)+h(X)}$.

Доказательство. Выберем семейство S непустых подмножеств пространства X в соответствии с леммой 8. К каждому $F \in S$ применим лемму 9 — в соответствии с ней выберем семейство γ_F непустых подмножеств пространства F. Положим $\mathscr{E} = \{\gamma_F: F \in S\}$. В силу транзитивности характера (УI) $\chi(\Phi, X) \leqslant bt(X) + h(X)$ для каждого $\Phi \in \mathscr{E}$. Каждому $\Phi \in \mathscr{E}$ поставим в соответствие какую-нибудь базу ξ_Φ множества Φ в X, для которой $|\xi_\Phi| \leqslant bt(X) + h(X)$. Так как X — хаусдорфово пространство, а семейство $\mathscr{E}$ состоит из попарно не пересекающихся непустых бикомпактов, $\{\xi_\Phi: \Phi \in \mathscr{E}\}$ — хаусдорфово семейство предфильтров. Если бы было $|\mathscr{E}| > 2^{c(X)+bt(X)+h(X)}$, то в силу леммы 6 нашлось бы дизъюнктное семейство элементов этих предфильтров, мощность которого больше чем $c(X)$, а это невозможно, так как предфильтры ξ_Φ, $\Phi \in \mathscr{E}$, состоят из открытых множеств. Значит, $|\mathscr{E}| \leqslant 2^{c(X)+bt(X)+h(X)}$. Отсюда и из условия (k_2) леммы 9 следует, что $|\bigcup\{\Phi: \Phi \in \mathscr{E}\}| \leqslant 2^{c(X)+bt(X)+h(X)}$. Но, очевидно, $[\bigcup\{\Phi: \Phi \in \mathscr{E}\}] = X$. Из леммы 1 следует, что $|[\bigcup\{\Phi: \Phi \in \mathscr{E}\}]| \leqslant |\bigcup\{\Phi: \Phi \in \in \mathscr{E}\}|^{bt(X)} \leqslant (2^{bt(X)+c(X)+h(X)})^{bt(X)} = 2^{bt(X)+c(X)+h(X)}$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. $[\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant 2^{bt(X)} + h(X)\}] = X$.

Доказательство. Мы применяем леммы 8 и 9, в частности, пользуемся условием (k_2) из формулировки леммы 9 (заметим, что если F — бикомпакт, то $\chi(x, F) \leqslant |F|$; сошлемся далее на транзитивность характера (УI).

Теорема 3 (G. C. H.). $[\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant bt(X) + h(X)\}] = X$.

Доказательство. Выберем в X (леммы 8 и 9) дизъюнктное семейство $\mathscr{E}$ бикомпактов, характер которых в X не превосходит $h(X) + bt(X)$, а мощность не превосходит $2^{bt(X)}$, такое что $[\bigcup\{\Phi: \Phi \in \mathscr{E}\}] = X$. Известно ([8]), что если X — бикомпакт и $\chi(x, X) > \tau$ для всех $x \in X$, то $|X| \geqslant 2^{(\tau+)}$. Принимая, что $2^{(\tau+)} > 2^{\tau}$ (это следует из обобщенной континуум-гипотезы), мы заключаем, что в каждом $\Phi \in \mathscr{E}$ точки, характер которых в Φ не превосходит $bt(X)$, образуют всюду плотное подмножество. Из транзитивности характера следует теперь заключение теоремы.

Топологическое пространство называется однородным, если для любых $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \to X$ такой, что $f(x) = y$ и $f(X) = X$.

Теорема 4. *Если X однородно, то* $\chi(X) \leqslant 2^{bt(X)} + h(X)$.

Теорема 5. (G. C. H.). *Если X однородно, то* $\chi(X) \leqslant bt(X) + h(X)$.

Теорема 6. *Если X однородно, то* $|X| \leqslant 2^{ic(X)+bt(X)+h(X)}$ *(см.* ([1])).

Теорема 4 следует из теоремы 2, теорема 5 следует из теоремы 3, а теорема 6 вытекает из теоремы 4 и ([1]) (см. теорему 2).

1-я группа следствий. *Пусть X — пространство точечно-счетного типа. Тогда*: а) *если X секвенциально и удовлетворяет условию Суслина, то* $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$; б) *если X секвенциально, то* $[\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant 2^{\aleph_0}\}] = X$; в) (С.Н.) *если X секвенциально, то* $[\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant \aleph_0\}] = X$; г) $[\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant 2^{bt(X)}\}] = X = [\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant 2(2^{t(x)})\}]$; д) $(G.C.H.)'$ $[\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant bt(X)\}] = X = [\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant 2^{t(X)}\}]$; е) (С.Н.) *если X является фактор-пространством пространства с 1-й аксиомой счетности, то* $[\{x \in X: \chi(x, X) \leqslant \aleph_0\}] = X$.

2-я группа следствий. *Пусть X — однородный бикомпакт. Тогда*: а) *если пространство X секвенциально, то* $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$; б) (С.Н.) *если пространство X секвенциально, то* $\chi(X) \leqslant \aleph_0$; в) $|X| \leqslant 2^{bt(X)}$; г) (G.C.H.): $\chi(X) \leqslant bt(X)$.

Примечание при корректуре. Имеет место

Теорема 7 (G.C.H.). *Мощность однородного бикомпакта не может быть предельным кардинальным числом.*

Из доказательства лемм 2, 5 и из лемм 8, 9 очевидно вытекает

Теорема 8. *Если* $h(X) \leqslant \aleph_0$ *и* $c(X') \leqslant \aleph_0$ *для всех* $X' \subset X$, *то* $X = [X^*]$, *где* $|X^*| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Верен аналог этой теоремы для любого τ.

Сформулировать теорему 8 мне подал мысль Б. Шапировский, ознакомившись с устным изложением этой работы.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, ДАН, 187, № 5, 967 (1969). [2] А. В. Архангельский, ДАН, 184, № 4, 767 (1969). [3] М. М. Чобан, Вестн. Моск. унив., № 6, 87 (1967). [4] I. Juhász, A. Hajnal, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., Ser. A, 70, № 3, 343 (1967). [5] А. В. Архангельский, ДАН, 181, № 6, 1303 (1968). [6] Б. А. Ефимов, Тр. Моск. матем. общ., 14, 211 (1965). [7] А. В. Архангельский, Там же, 13, 3 (1965). [8] E. Čech, B. Pospišil, Publ. Faculté Sci. Univ. Masaryk, Brno, 258, 1 (1938). [9] W. Sierpiński, Cardinal and Ordinal Numbers, Warszawa, 1965.