Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 5

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

И. М. КОЗЛОВСКИЙ

О ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 VIII 1969)

Под полиэдром в этой заметке понимается симплициальный комплекс, расстояние в котором определяется как максимум разности барицентрических координат. Следуя терминологии, принятой в ([1], [2]), мы говорим, что отображение $g\colon X \to K$ в комплекс является допустимым изменением отображения $f\colon X \to K$, если fx содержится в замкнутом носителе точки gx для любого $x \in X$; отображение f неприводимо, если $fX \subseteq gX$ для всякого его допустимого изменения g; отображение $\pi\colon K \to K'$ нормально, если π симплициально отображает комплекс K в некоторое многократное барицентрическое подразделение комплекса K'. Обратный спектр $\{P_i, \pi_{ij}\}$ называется полиэдральным представлением пространства X, если $X = \lim \{P_i, \pi_{ij}\}$, P_i — полиэдры и $\pi_{i+1;\, i}$ симплициально отображают P_{i+1} на некоторое подразделение комплекса P_i; представление называется неприводимым, если проекции $\pi_i\colon X \to P_i$ неприводимы, и стандартным, если отображения $\pi_{i+1;\, i}$ нормальны, а полиэдры P_i конечномерны.

Как показал Исбэлл ([3]), всякое полное метрическое пространство имеет неприводимое стандартное полиэдральное представление. Для компактов это утверждение доказал Фрейденталь ([1]) (см. также ([6])). Б. Пасынков ([5]) доказал, что всякий n-мерный компакт можно представить в виде предела обратного спектра из n-мерных полиэдров с конечнократными проекциями «в». В настоящей заметке излагаются обобщения этих результатов (теоремы 1, 2, 3) и некоторые факты относительно равномерно нульмерных отображений в полиэдры.

Пусть $\mathcal{F}$ — система замкнутых подмножеств пространства X. Полиэдральное представление $\{P_i, \pi_{ij}\}$ пространства X мы называем (неприводимым, стандартным) полиэдральным представлением системы $\mathcal{F}$, если для любого $F \in \mathcal{F}$ найдется натуральное число j такое, что $\{\pi_i(F), \pi_{ij};\ i = j, j+1, \ldots\}$ является (неприводимым, стандартным) полиэдральным представлением подпространства $F \subseteq X$. Символ $\omega_f K$ будет обозначать покрытие пространства X прообразами главных звезд комплекса K при отображении $f\colon X \to K$. Если покрытие $\omega_f K$ локально конечно, то отображение f мы будем называть локально конечным, чтобы подчеркнуть тот факт, что каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, отображающуюся посредством f в конечный подкомплекс комплекса K.

Лемма 1. *Пусть f — локально конечное отображение нормального пространства X в комплекс K и C — замкнутое в X множество. Всякое (неприводимое) допустимое изменение g_1 отображения $f_1 = f|_C$ можно продолжить на X в (неприводимое) допустимое изменение g отображения f.*

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{F}$ — локально конечная система замкнутых подмножеств паракомпактного пространства X. Всякое отображение* * *простран-*

* Под отображением всюду понимается непрерывное отображение.

ства X в комплекс имеет допустимое изменение, неприводимое на каждом элементе системы $\mathcal{F}$ *.

Теорема 1. *Всякая σ-локально конечная система замкнутых подмножеств полного метрического пространства имеет неприводимое стандартное полиэдральное представление.*

Доказательство подобно доказательству теоремы Исбэлла ([2, 3]) и использует утверждение леммы 2.

Аналогичными методами доказывается

Теорема 2. *Пусть X — полное метрическое пространство; α_i — счетная последовательность его открытых покрытий и $\mathcal{F}$ — σ-локально конечная система замкнутых в X множеств. Существует такое неприводимое полиэдральное представление $\{P_i, \pi_i^{i+1}\}$ системы $\mathcal{F}$, что проекции π_i: $X \to P_i$ являются каноническими α_i-отображениями* **.

Легко привести пример, показывающий, что для σ-локально счетных систем теоремы 2 и 3, вообще говоря, не верны. Однако, для всякой σ-локально счетной системы $\mathcal{F}$ замкнутых множеств паракомпактного пространства существует σ-дискретная система Φ замкнутых множеств такая, что каждый элемент из $\mathcal{F}$ является счетным объединением некоторых элементов из Φ.

Лемма 3. *Пусть f: $X \to K$ — равномерно нульмерное отображение метрического пространства X в n-мерный комплекс K. Для любого $\varepsilon > 0$ существует n-мерный комплекс K_1 и отображения π: $K_1 \to K$, f_1: $X \to K_1$, удовлетворяющие условиям*: 1) *отображение π нормально и не вырождает симплексы*; 2) *отображение f_1 равномерно нульмерно, $f = \pi f_1$ и покрытие $\omega_{f_1}K_1$ является ε-покрытием*; 3) *если покрытие $\omega_f K$ локально конечно, то покрытие $\omega_{f_1}K_1$ также можно считать локально конечным.*

Доказательство. Из равномерной нульмерности отображения f следует, что для некоторого натурального s прообразы главных звезд s-кратного барицентрического подразделения $K^{(s)}$ комплекса K (дискретно) ε-распадаются. Пусть $\{U_{\alpha\gamma}\}_\gamma$ — открытые множества, на которые (дискретно) ε-распадается множество $U_\alpha \in \omega_f K^{(s)}$. В качестве комплекса K_1 возьмем нерв покрытия $\{U_{\alpha\gamma}\}_{\alpha,\gamma}$. Соответствие $U_{\alpha\gamma} \to U_\alpha$ однозначно определяет симплициальное отображение π: $K_1 \to K^{(s)}$. Так как множества $U_{\alpha\gamma}$ при фиксированном α попарно не пересекаются, то разным вершинам симплекса $t \subset K_1$ соответствуют разные вершины симплекса $\pi(t)$, и, следовательно, π не вырождает симплексы.

Пусть $\{f_\alpha\}$ — разбиение единицы на X, соответствующее отображению f: $X \to K^{(s)}$. Положив $f_{\alpha\gamma} = f_\alpha$ на $U_{\alpha\gamma}$, $f_{\alpha\gamma} = 0$ на $X \setminus U_{\alpha\gamma}$, определим новое разбиение единицы $\{f_{\alpha\gamma}\}_{\alpha,\gamma}$, которое определяет равномерно нульмерное отображение f_1: $X \to K_1$ и покрытие $\omega_{f_1}K_1$, совпадающее с покрытием $\{U_{\alpha\gamma}\}_{\alpha,\gamma}$. Последнее, по построению, является ε-покрытием. Если теперь покрытие $\omega_f K$, следовательно, и покрытие $\omega_f K^{(s)}$ локально конечно, а система $\{U_{\alpha j}\}_\gamma$ дискретна при любом α, чего всегда можно добиться соответствующим выбором числа s, то покрытие $\omega_{f_1}K_1$ также локально конечно. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть f: $X \to K$ — равномерно нульмерное отображение метрического пространства X в комплекс K и ω-открытое покрытие пространства X. Существует комплекс K_ω и отображения π: $K_\omega \to K$, f_ω: $X \to K_\omega$, удовлетворяющие условиям*: 1) *f_ω — равномерно нульмерное каноническое ω-отображение*; 2) $\pi f_\omega = f$; 3) *отображение π кусочно-аффинно и невырождено*; 4) *если f локально конечно, то f_ω также можно считать локально конечным.*

Предложение 1 следует из леммы 3. В качестве следствия из предложения 1 получаем

---

* Отображение f неприводимо на $A \subseteq X$, если неприводимо отображение $f \mid A$.

** Отображение f: $X \to K$ называется каноническим α-отображением, если покрытие $\omega_f K$ вписано в покрытие α.

П р е д л о ж е н и е 2. *Всякое равномерно нульмерное отображение n-мерного * метрического пространства в n-мерный симплекс локально существенно **.*

Л е м м а 4. *Пусть f — равномерно нульмерное отображение метрического пространства в симплекс T с границей S. Если $\dim X < \dim T$, то существует равномерное нульмерное отображение $g\colon X \to S$, совпадающее с f на $f^{-1}S$.*

П р е д л о ж е н и е 3. *Всякое равномерно нульмерное локально конечное отображение метрического пространства в конечномерный комплекс имеет равномерно нульмерное неприводимое допустимое изменение.*

Предложение 3 следует из предложения 2 и леммы 4. Требование локальной конечности здесь существенно.

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть f — отображение замкнутого подмножества A метрического пространства X в n-мерный куб I. Если $\dim X \setminus \setminus A \leqslant n$, то множество отображений, каждое из которых равномерно нульмерно вне любой ε-окрестности A, является плотным типа G_δ множеством в пространстве $C_f(X, I)$ отображений $g\colon X \to I$, совпадающих с f на A; если, кроме того, f равномерно нульмерно, то равномерно нульмерные отображения образуют плотное типа G_δ множество в пространстве $C_f(X, I)$.*

З а м е ч а н и е. Как показывает соответствующий пример, в случае произвольного f множество равномерно нульмерных отображений $g \in C_f(X, I)$ может быть пустым.

С помощью леммы 3, предложения 3 и теоремы Катетова ([4]) можно доказать следующий основной результат.

Т е о р е м а 3. *Всякая σ-локально конечная система замкнутых подмножеств полного конечномерного метрического пространства X имеет неприводимое стандартное полиэдральное представление $\{P_i, f_{ji}\}$ с невырожденными отображениями f_{ji} и равномерно нульмерными проекциями $f_i\colon X \to P_i$. Если $\{\omega_i\}$ — счетная последовательность открытых покрытий X, то проекции f_i можно считать каноническими ω_i-отображениями.*

З а м е ч а н и е. Если X — компакт, то проекции f_{ji} можно считать конечнократными.

Известны характеристики размерности при помощи: 1) существенных отображений нормальных пространств в куб (П. С. Александров); 2) неприводимых ω-отображений нормальных пространств в полиэдры (П. С. Александров, Даукер); 3) равномерно нульмерных отображений метрических пространств в куб (Катетов, для компактов *** — Гуревич). С помощью предложений 1, 2, 3 можно следующим образом обобщить эти характеристики.

Т е о р е м а 4. *Для метрических пространств следующие условия эквивалентны*: 1) $\dim X = n$; 2) *пространство X обладает равномерно нульмерным существенным отображением в n-мерный куб*; 3) *всякое равномерно нульмерное отображение пространства X в n-мерный куб локально существенно*; 4) *для любого своего открытого покрытия ω пространство X обладает неприводимым равномерно нульмерным каноническим ω-отображением на n-мерный комплекс.*

Эквивалентность условий (1) и (2) для произвольных метрических пространств, а также условий (1), (2) и (3) для компактов доказана А. Зарелуа и Ю. Смирновым ([8]). Существование равномерно нульмерных ω-отображений (без предположения о неприводимости) n-мерного метри-

---

* Под размерностью здесь и далее понимается размерность dim.

** Отображение f в n-мерный симплекс T называется локально существенным, если некоторый меньший n-мерный симплекс, содержащийся в T, покрыт существенно ([8]).

*** Для компактов равномерно нульмерные отображения совпадают с нульмерными.

ческого пространства в n-мерный полиэдр (и даже более общее утверждение) доказано ранее Е. Г. Скляренко ([7], теорема К). По поводу предложения 4 смотри также ([9]).

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность моему руководителю Б. А. Пасынкову за постоянное внимание и большую помощь в работе.

Московский физико-технический институт

Поступило 25 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Freudental, Composito Math., 4, № 2 (1937). [2] J. R. Isbell, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., Ser. A, 64, № 2 (1961). [3] J. R. Isbell, Pacific J. Math., 12, № 1 (1962). [4] М. Катетов, ДАН, 79, № 2, 189 (1951). [5] Б. А. Пасынков, Тр. Моск. матем. общ., 13, 136 (1965). [6] Е. Г. Скляренко, ДАН, 134, № 4 (1960). [7] Е. Г. Скляренко, УМН, 21, в. 4 (1966). [8] А. В. Зарелуа, Ю. М. Смирнов, ДАН, 148, № 5 (1963). [9] S. Sakai, Proc. Japan Acad., 44, 939 (1968).