Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 2

УДК 519 *МАТЕМАТИКА*

О. БОНДАРЕВА

ТЕОРЕМА О ВНЕШНЕ УСТОЙЧИВЫХ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 23 X 1969)

Рассмотрим кооперативную игру Γ с множеством игроков $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ и характеристической функцией $v(S)$, заданной в 0—1-редуцированной форме, т. е.

$$v(i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n; \quad v(I) = 1.$$

Тогда множество дележей $A = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \geqslant 0, \; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$.

Как известно, решение есть множество дележей $V \subset A$, обладающее внутренней и внешней устойчивостью.

Ядро является значительно более простым образованием, чем решение; его вид

$$U = \left\{x \in A \colon \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S), \; \forall S \subset I\right\}.$$

Если все $v(S) = 0$, $S \subsetneqq I$, то $A = U$ и U есть решение, известны и нетривиальные достаточные условия, которым должна удовлетворять $v(S)$, чтобы ядро было решением (см. [1, 2]).

Возник вопрос, нельзя ли устроить некоторый переход от ядра к решению. Оказывается, что если в игре трех лиц непрерывно увеличивать $v(S)$, $|S| = 2$, до некоторого $v'(S)$, при котором ядро все еще не пусто, то последнее вместе со следами пересечений его границ во время этого процесса (см. точные определения ниже) дают решение игры. В общем случае можно доказать лишь внешнюю устойчивость такого множества.

Сформулируем теперь задачу математически. Рассмотрим семейство игр Γ_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с множеством игроков $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, одинаковым для всех игр, и пусть

$$v_t(i) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$v_t(I) \equiv 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

а $v_t(S) = f_S(t)$, $2 \leqslant |S| \leqslant n-1$,— неубывающие непрерывные функции на $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Обозначим через $U(t)$ ядро игры Γ_t, через $V(t)$ — решение, а через $F(t)$ — следующее множество:

$$F(t) = \bigcup_{0 \leqslant \tau < t} \; \bigcup_{S \neq T} \left\{ \begin{array}{l} x \in U(\tau), \\ \sum_{i \in S} x_i = f_S(\tau), \; 2 \leqslant |S| \leqslant n-1, \\ \sum_{i \in T} x_i = f_T(\tau), \; 2 \leqslant |T| \leqslant n-1. \end{array} \right.$$

Положим $W(t) = F(t) \cup U(t)$. Заметим, что множество дележей A одинаково для всех игр Γ_t.

Теорема. *Если семейство игр Γ_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, таково, что*: 1) $U(0) = V(0)$; 2) $U(1) \neq \Lambda$, *то множество $W(t)$ внешне устойчиво в игре Γ_t для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

Доказательство. Фиксируем некоторое t: $0 < t \leqslant 1$ (для $t = 0$ теорема верна по условию 1)). Внешняя устойчивость $W(t)$ означает, что каков бы ни был $z \in A - W(t)$, существует такой $x \in W(t)$, что $x \succ z$.

Рассмотрим две возможности.

I. $z \notin U(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Так, как $U(0) = V(0)$ и $z \notin U(0)$, то существуют такие $y \in U(0)$ и существенная S_0, что

$$y \underset{S_0}{\succ} z. \tag{1}$$

Рассмотрим множества

$$h_{S_0}(\tau) = U(\tau) \cap \left\{x\colon \sum_{i \in S_0} x_i = f_{S_0}(\tau)\right\},$$

$$H_{S_0}(t) = \bigcup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} h_{S_0}(\tau)$$

и выпуклый открытый конус

$$K_{S_0}(z) = \{x \in A\colon x_i > z_i, \ \ \forall i \in S_0\}.$$

Ввиду условия (1) $K_{S_0}(z) \cap h_{S_0}(0) \neq \Lambda$.

1) Если $H_{S_0}(t) \in F(t)$, то $y \in W(t)$, и $y \succ z$; остается случай:

2) $H_{S_0}(t) \notin F(t)$, т. е. существует такой $x \in H_{S_0}(t)$, что $\sum\limits_{i \in S} x_i > v(S)$, $S \subsetneq I$, $S \neq S_0$; это означает, что $H_{S_0}(t)$ — замкнутая область размерности $(n-1)$ в эвклидовом пространстве E_{n-1}. Так как $K_{S_0}(z) \cap h_{S_0}(0) \neq \Lambda$, то открытый конус $K_{S_0}(z)$ пересекает множество $H_{S_0}(t)$ в некоторой точке ω, лежащей на границе $H_{S_0}(t)$, но не принадлежащей $h_{S_0}(0)$. Если при этом: а) $\omega_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\omega \in F(t)$, значит, $\omega \in W(t)$, и $\omega \succ z$; остается случай б) $\omega_{i_0} = 0$ и $\omega \notin F(t)$, обязательно при этом $i_0 \notin S_0$; пусть τ_0: $\sum\limits_{i \in S_0} \omega_i = f_{S_0}(\tau_0) > f_{S_0}(0)$, тогда

$$\sum_{i \in T} \omega_i > f_T(\tau_0), \ T \neq S_0. \tag{2}$$

Рассмотрим дележ $\alpha(\mathscr{E}) = (\alpha_1(\mathscr{E}), \ldots, \alpha_n(\mathscr{E}))$:

$$\alpha_i(\mathscr{E}) = \omega_i + \frac{\mathscr{E}}{|S_0|}, \quad i \in S_0,$$

$$\alpha_j(\mathscr{E}) = \omega_j - \mathscr{E}_j, \quad j \notin S_0,$$

$$\mathscr{E} \geqslant 0, \quad \mathscr{E}_j \leqslant \omega_j, \quad \sum_{j \notin S_0} \mathscr{E}_j = \mathscr{E}.$$

Легко показать, что, непрерывно увеличивая $\mathscr{E}$, мы получим, наконец, такое $\bar{\mathscr{E}}$, что либо $\alpha(\bar{\mathscr{E}}) \in U(t)$, либо нарушатся по крайней мере два условия из (2), т. е. $\alpha(\bar{\mathscr{E}}) \in F(t)$. Значит, и в случае б) существует $\alpha(\bar{\mathscr{E}}) \succ z$, $\alpha(\bar{\mathscr{E}}) \in W(t)$.

II. $z \in U(\tau_0)$, $0 \leqslant \tau_0 < t$, т. е. $z \in U(0)$. Рассмотрим множества $H_S(t)$ для всех S: $1 < |S| < n$ (они могут быть как пустыми, так и повторяющимися). Ясно, что $\bigcup\limits_S H_S(t) \cup U(t) = U(0)$; так как $z \notin U(t)$, то существует непустое $H_{S_0}(t)$: $z \in H_{S_0}(t)$. Рассмотрим конус $K_{S_0}(z)$; так как $\sum\limits_{i \in S_0} z_i \geqslant v(S_0)$ и $K_{S_0}(z)$ открыт, то $K_{S_0}(z) \cap h_{S_0}(0) = \Lambda$. Так как $z \notin F(t)$, то $H_{S_0}(t)$ в пространстве E_{n-1} является замкнутым множеством той же размерности, точка z — внутренняя точка $H_{S_0}(t)$, значит, конус $K_{S_0}(z)$ пересекает $H_{S_0}(t)$ в точке $y \notin h_{S_0}(0)$. Далее, как и в случае I, 2), рассматриваем две возможности, чем и завершаем доказательство.

Пример. Рассмотрим рынок с одним продавцом, игроком 1, и покупателями, игроками 2, 3, ..., n. Тогда $v(S) = 0$, $1 \notin S$, и пусть $v(1, 2, \ldots$

$\ldots, n) = 1$. Если $v(S) \leqslant 1/(n - |S| + 1)$, $1 \in S$, то, по теореме Т. Е. Кулаковской, игра имеет решение, совпадающее с ядром.

Рассмотрим преобразование

$$f_{S_0}(t) = t,\ S_0 = (2, 3, \ldots, n); \quad f_S(t) \equiv v(S),\ S \neq S_0;$$

очевидно, что Γ_t для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеет непустое ядро.

Рассмотрим множество $W(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, оно внешне устойчиво в Γ_t по теореме. Внутренняя устойчивость его может нарушиться из-за доминирования по коалиции S_0. Но для любого $x = (x_1, \ldots, x_n)$: $\sum_{i=2}^{n} x_i = t$,

$\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$, если $y = (y_1, \ldots, y_n)$ таков, что $y_i < x_i$, $i = 2, \ldots, n$, то $\sum_{i \in S} y_i > v(S)$, $1 \in S$, т. е. $\operatorname{dom} h_{S_0}(t)$ лежит внутри ядра $U(0)$, т. е. $W(t)$ внутренне устойчиво.

Итак, описано решение для любой игры:

$$v(S) \leqslant 1/(n - |S| + 1),\ 1 \in S; \quad v(S) = 0,\ S \quad \{2, \ldots, n\};$$

$$v(2, 3, \ldots, n) \leqslant 1.$$

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 7 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 О. Н. Бондарева, Проблемы кибернетики, в. 10, 1963.