Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 2

УДК 517.941.92 **МАТЕМАТИКА**

С. ДАЙОВИЧ (Югославия)

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 26 XI 1969)

В своей статье [1] В. Г. Болтянский установил необходимые и достаточные условия оптимальности для линейной задачи с подвижными концами при условии, что линейная задача невырождена, а множество M_1, на котором заканчивается процесс, сильно устойчиво. В настоящей статье эта задача рассматривается в случае, когда множество M_1 является устойчивым (а не сильно устойчивым); условие невырожденности, введенное в [1], также не предполагается выполненным.

Рассматривается линейный управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + v \tag{1}$$

с постоянными (действительными) коэффициентами, где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — фазовая переменная, $v = (v^1, v^2, \ldots, v^k)$ — управляющий параметр или так называемый объект (A, V). Предполагается, что область управления V является замкнутым ограниченным выпуклым множеством фазового пространства. Допустимым управлением называется каждая кусочно-непрерывная функция $v(t)$ со значениями в множестве V, заданная на некотором отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Пусть M_0 и M_1 — некоторые замкнутые выпуклые множества, заданные в фазовом пространстве X; $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — некоторое допустимое управление, а $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— соответствующая траектория, которая осуществляет переход из множества M_0 на множество M_1: $x(t_0) \in M_0$, $x(t_1) \in M_1$. Тогда число $t_1 - t_0$ называется в р е м е н е м п е р е х о д а из M_0 на M_1 по траектории $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Процесс $(x(t), v(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, осуществляющий переход из M_0 на M_1, называется оптимальным, если время перехода из M_0 на M_1 с помощью любых других допустимых управлений будет не меньше.

Целесообразно ввести следующие определения. Пусть $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— процесс, осуществляющий переход из множества M_0 на множество M_1. Если существует нетривиальное решение $\psi(t)$ вспомогательной системы

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \tag{2}$$

для которого функции $v(t)$, $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют условию максимума и условиям трансверсальности (см. [2]) в левом и правом концах, то процесс $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, условимся называть экстремальным. Далее, если существует нетривиальное решение $\psi(t)$ системы (2), для которого экстремальный процесс $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяет и дополнительному условию

$$H(t) = \psi(t)\dot{x}(t) \equiv 0,$$

то такой экстремальный процесс условимся называть исключительным.

Теперь теорема 1 ([1], стр. 785) может быть сформулирована так:

Теорема 1. *Если множество M_1 сильно устойчиво *, то для оптимальности процесса $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимо и достаточно, чтобы он был экстремальным.*

Прежде чем перейти собственно к предмету нашего исследования, отметим еще два простых факта, непосредственно вытекающих из работы ([1]) (множество M_1 предполагается устойчивым, а не сильно устойчивым).

Предложение 1. *Если $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— экстремальный процесс, осуществляющий переход из множества M_0 на множество M_1, то функция $H(t) = \psi(t)\dot{x}(t) = \psi(t)(Ax(t) + v(t))$ удовлетворяет условию $H(t) = \text{const} \geqslant 0$.*

Постоянство функции H доказано в ([2]). Неотрицательность этой константы вытекает из соотношения

$$H(t_0) = \psi(t_0)\dot{x}(t_0) = n_0 \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = n_0 \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x_0}{t - t_0}$$

и того факта, что $x(t) \in Y_{t_1 - t_0}$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (см. соотношение (11) в ([1])).

Предложение 2. *Если $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— экстремальный процесс, осуществляющий переход из множества M_0 на множество M_1, то для любого θ, $t_0 \leqslant \theta \leqslant t_1$, гиперплоскость Γ_θ, проходящая через точку $x(\theta)$ и ортогональная вектору $\psi(\theta)$, является опорной гиперплоскостью выпуклого множества $Y_{t_1-\theta}$, т. е.*

$$\psi(\theta)(x^* - x(\theta)) \geqslant 0 \text{ при } x^* \in Y_{t_1-\theta}. \quad (3)$$

Доказательство предложения 2 см. ([1]), стр 793.

Заметим (см. примеры в ([1])), что без предположения сильной устойчивости экстремальность уже не является достаточным условием оптимальности. В частности, пример 4 ([1]) показывает, что если множество M_1 устойчиво, но не сильно устойчиво, то экстремальный процесс, даже не являющийся исключительным, может не быть оптимальным.

Иначе говоря, требование экстремальности даже при дополнительном условии $H > 0$ еще не обеспечивает оптимальности. Любопытно отметить, что, хотя указанный в примере 4 ([1]) экстремальный процесс сам не является исключительным, однако более быстрый процесс перехода, показывающий неоптимальность процесса $(v(t), z(t))$, сам уже удовлетворяет условию $H \equiv 0$, т. е. является исключительным. Следующая теорема показывает, что этот факт является общим.

Теорема 2. *Если (в предположении устойчивости множества M_1) экстремальный процесс $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, осуществляющий переход из множества M_0 на M_1, не является оптимальным, то существует исключительный экстремальный процесс, осуществляющий переход из M_0 на M_1 за меньшее время.*

Доказательство. Допустим, что экстремальный процесс $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, не является оптимальным. Тогда существует такое допустимое управление $\tilde{v}(t)$, под воздействием которого фазовая точка, выходящая в момент t_0 из некоторого положения $\tilde{x}_0 \in M_0$, попадает в какую либо точку множества M_1 в момент времени $\tau < t_1$ (т. е. раньше, чем при движении по траектории $x(t)$). Фазовую траекторию, исходящую из точки $\tilde{x}_0$ и соответствующую управлению $\tilde{v}(t)$, обозначим через $\tilde{x}(t)$. По предположению, $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \in M_0$, $\tilde{x}(\tau) \in M_1$.

Пусть θ — произвольная точка отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Так как функции $v(t)$, $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют условию максимума и условию трансверсальности в левом конце, то, согласно лемме 4 работы ([1]), имеем:

$$\psi(\theta)x(\theta) - \psi(\theta)\tilde{x}(\theta) \geqslant 0 \quad \text{при } t_0 \leqslant \theta \leqslant \tau. \quad (4)$$

---

* Определения устойчивости, сильной устойчивости множества M_1, сферы достижимости множества M_1 см. ([1]).

Из точки $\tilde{x}(\theta)$ можно перейти на множество M_1 за время $\tau - \theta$ (по траектории $\tilde{x}(t)$, $\theta \leqslant t \leqslant \tau$), т. е. $\tilde{x}(\theta) \in Y_{\tau-\theta} \subset Y_{t_1-\theta}$. Следовательно, в силу (3), $\psi(\theta)(\tilde{x}(\theta) - x(\theta)) \geqslant 0$. Сопоставляя это с неравенством (4), получаем

$$\psi(\theta)(\tilde{x}(\theta) - x(\theta)) \equiv 0 \quad \text{при } t_0 \leqslant \theta \leqslant \tau. \tag{5}$$

Пусть теперь θ_0 — произвольная точка непрерывности управлений $v(t)$, $\tilde{v}(t)$, расположенная на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$, так что $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ имеют в точке $t = \theta_0$ непрерывную производную

$$\dot{x}(\theta_0) = Ax(\theta_0) + v(\theta_0), \quad \dot{\tilde{x}}(\theta_0) = A\tilde{x}(\theta_0) + \tilde{v}(\theta_0). \tag{6}$$

Кроме того, функция $\psi(\theta)(\tilde{x}(\theta_0) - x(\theta))$ переменного θ достигает минимума в точке $\theta = \theta_0$, поэтому

$$\frac{d}{d\theta}\psi(\theta)(\tilde{x}(\theta_0) - x(\theta))\big|_{\text{при } \theta=\theta_0} = \dot\psi(\theta_0)(\tilde{x}(\theta_0) - x(\theta_0)) = \psi(\theta_0)\dot{x}(\theta_0) = 0.$$

Учитывая (2) и (6), получаем отсюда

$$(-A^*\psi(\theta_0))(\tilde{x}(\theta_0) - x(\theta_0)) - \psi(\theta_0)(Ax(\theta_0) + v(\theta_0)) = 0$$

или

$$-\psi(\theta_0)(A\tilde{x}(\theta_0) - Ax(\theta_0)| - \psi(\theta_0)(Ax(\theta_0) + v(\theta_0)) = 0,$$

откуда

$$\psi(\theta_0)(A\tilde{x}(\theta_0) + v(\theta_0)) = 0. \tag{7}$$

Дифференцируя соотношение (5) при $\theta = \theta_0$, получаем в силу (2) и (6)

$$\psi(\theta_0)(\tilde{v}(\theta_0) - v(\theta_0)) = 0, \tag{8}$$

и поэтому, согласно (7):

$$\psi(\theta_0)(A\tilde{x}(\theta_0) + \tilde{v}(\theta_0)) = 0, \quad \text{т. е. } \psi(\theta_0)\dot{\tilde{x}}(\theta_0) = 0. \tag{9}$$

Соотношения (8) и (9) имеют место в точках непрерывности управлений $v(t)$ и $\tilde{v}(t)$, т. е. во всех точках отрезка $[t_0, \tau]$ за исключением конечного числа точек.

Пользуясь соотношениями (8), (5), (3) и (9), нетрудно доказать, что функции $\tilde{v}(t)$, $\tilde{x}(t)$, $\psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$, удовлетворяют условию максимума, условиям трансверсальности в левом и правом концах и дополнительному условию $H \equiv 0$, т. е. что $(\tilde{v}(t), \tilde{x}(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$, есть исключительный экстремальный процесс.

Смысл этой теоремы заключается в следующем. Как правило, при заданных M_0 и M_1 не существует исключительных экстремальных процессов, осуществляющих переход из M_0 на M_1 (так как требование $H \equiv 0$ представляет собой излишнюю добавочную информацию, обычно не совместимую с экстремальностью). Если же исключительные процессы существуют, то их легко найти и выбрать из них наилучший. Поэтому практически сформулированная теорема полностью решает вопрос об оптимальности в случае устойчивого множества M_1. Заметим, что эту теорему можно сформулировать еще следующим образом:

Теорема 3. *Если (в предположении устойчивости множества M_1) не существует исключительного экстремального процесса, осуществляющего переход из M_0 на M_1, то для оптимальности процесса $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, осуществляющего переход из M_0 на M_1, необходимо и достаточно, чтобы он был экстремальным.*

Доказательство необходимости этого условия (даже без предположения о несуществовании исключительных процессов) совпадает с первой частью доказательства теоремы 1 ([1]) (условие сильной устойчивости множества M_1 и условие невырожденности в этой части доказательства не используются). Достаточность условия непосредственно вытекает из теоремы 2.

В заключение сформулируем еще одно предложение, которое дает достаточное условие оптимальности, иногда являющееся удобным.

Предложение 3. *Пусть (в предположении устойчивости множества* M_1*)* $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,*— экстремальный процесс, осуществляющий переход из множества* M_0 *на множество* M_1. *Кроме того, предположим, что при* $t_0 < \theta < t_1$ *гиперплоскость* Γ_θ, *проходящая через точку* $x(\theta)$ *и ортогональная вектору* $\psi(\theta)$, *не имеет общих точек с множеством* M_1. *Тогда процесс* $(v(t), x(t))$ *оптимален.*

Доказательство предложения 3 совпадает с второй частью доказательства теоремы 1 ([1]) (ибо $\psi(\theta)(x^* - x(\theta)) > 0$ для любой точки $x^* \in M_1$).

Поступило
18 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Болтянский, Дифференциальн. уравн., № 5, 783 (1969). [2] В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, изд. 2-е, «Наука», 1969.