Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 2

УДК *ГИДРОМЕХАНИКА*

В. Е. ЗАХАРОВ, академик Р. З. САГДЕЕВ

О СПЕКТРЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

1. Под акустической турбулентностью понимается турбулентность сжимаемой жидкости, при которой течение жидкости потенциально и представляет собой совокупность взаимодействующих звуковых волн (звуковой шум).

Введем нормальные переменные — комплексные амплитуды бегущих волн — по формулам

$$\rho_k = \frac{|k|}{\sqrt{2}\omega_k^{1/2}}\rho_0^{1/2}(a_k + a^*_{-k}), \quad \omega_k = c(\mathbf{k}),$$

$$\Phi_k = -\frac{i\omega_k^{1/2}}{\sqrt{2}|k|\rho_0^{1/2}}(a_k - a^*_{-k}). \tag{1}$$

Здесь c — скорость звука; ρ_k и Φ_k — фурье-образцы плотности и гидродинамического потенциала. В этих переменных уравнения гидродинамики имеют вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i\int V_{kk_1k_2}(a_{k_1}a_{k_2}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} + 2a^*_{k_1}a_{k_2}\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} + a^*_{k_1}a_{k_2}\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2})d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2; \tag{2}$$

$$V_{kk_1k_2} = \frac{1}{16}\left(\frac{c}{\pi^3\rho_0}\right)^{1/2}\left\{\frac{|\mathbf{k}|^{1/2}}{|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|^{1/2}}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) + \frac{|\mathbf{k}_1|^{1/2}}{(|\mathbf{k}||\mathbf{k}_2|)^{1/2}}(\mathbf{k}\mathbf{k}_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{|\mathbf{k}_2|^{1/2}}{(|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1|)^{1/2}}(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) + 3q(|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|)^{1/2}\right\}. \tag{3}$$

Здесь предполагается, что амплитуды волн малы $(\delta\rho/\rho \ll 1)$ и можно пользоваться разложением внутренней энергии жидкости по степеням вариации плотности

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_0}\left(\delta\rho^2 + q\frac{\delta\rho^3}{\rho_0}\right).$$

При этом с точностью до старших членов спектральная плотность энергии имеет вид

$$\varepsilon_k = 4\pi k^2\omega_k\langle|a_k|^2\rangle. \tag{4}$$

В низшем порядке теории возмущений звуковые волны взаимодействуют, подчиняясь законам сохранения

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.$$

Эти законы могут быть выполнены только для коллинеарных векторов, направленных в одну сторону. Что касается процессов высших порядков, то их амплитуды имеют сильные особенности, когда волновые векторы взаимодействующих волн направлены по одной прямой. Поэтому можно считать, что с волной, имеющей волновой вектор $\mathbf{k}_0$, взаимодействуют только те волны, волновые векторы которых лежат в весьма узком конусе с осью $\mathbf{k}_0$. Для оценки ширины этого конуса перейдем в систему отсчета, движущуюся в направлении $\mathbf{k}_0$ со скоростью c и разложим $|\mathbf{k}|$ вблизи $\mathbf{k}_0$. Линейный член в уравнении (2) примет вид

$$ic(|\mathbf{k}|-|\mathbf{k}_0|)a_k \approx ic\left(k_z+\frac{1}{2}\frac{k_\perp^2}{k_0}\right)a_k.$$

Далее заменой переменной $a_k = a_k{}^* e^{-ick_z t}$ устраним член $ick_z a_k$. Теперь определим величину $k_\perp{}^{02}$ из сравнения по порядку величины линейного и квадратичного членов в уравнении (2)

$$c\frac{k_\perp^{02}}{k_0}a^* \sim Va^{*2}k_0^3.$$

Отсюда

$$k_\perp^{02} \sim \frac{V}{c}a^* k_0^4 \sim k_\parallel^2\frac{\delta\rho}{\rho}. \tag{5}$$

Величина $k_\perp{}^0$, очевидно, и представляет собой характерный поперечный размер конуса взаимодействия, так как при $k_\perp \gg k_\perp{}^0$ взаимодействие волн становится нерезонансным и сильно ослабевает.

Характерное время нелинейного взаимодействия можно оценить по формуле

$$\frac{1}{\tau} \sim Va^* k_0 k_\perp^2 \sim \frac{V^2}{c}a^{*2}k_0^5. \tag{6}$$

Заметим еще, что из-за специфического характера взаимодействия звуковых волн можно в формуле (3) приближенно заменить скалярные произведения на произведения модулей, при этом получим

$$V_{kk_1k_2} \approx {}^3/_{16}(c/\pi^2\rho_0)^{1/2}(1+q)(|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|)^{1/2}. \tag{7}$$

Особенности у амплитуд процессов высших порядков не позволяют, даже для волн малой амплитуды, ограничиться низким порядком и перейти к теории слабой связи. Такой переход возможен только при наличии дисперсии звука, когда $\omega_k = ck(1+\varepsilon k^2)$; при этом должно ([1]) выполняться условие $\rho^{-1}\delta\rho \ll \varepsilon k^2$. Поэтому для случая сильной связи $(\varepsilon=0)$ мы будем пользоваться размерностными оценками. Принимая гипотезу Колмогорова ([2, 3]), будем считать, что турбулентность является локально изотропной и что ее спектр полностью определяется единственной величиной — потоком энергии в область больших k, который может быть определен по формуле

$$P = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \varepsilon_k dk \simeq \frac{\varepsilon_k k}{\tau}, \tag{8}$$

где τ — характерное время нелинейного взаимодействия.

Из-за наличия дополнительной по сравнению с несжимаемой жидкостью величины — скорости звука c — размерностных соображений недостаточно для определения спектра, из них следует только, что спектр имеет вид

$$\varepsilon_k = \frac{\rho_0 c^2}{k}f\left(\frac{P}{\rho_0 c^3 k}\right), \tag{9}$$

где f — неизвестная пока функция.

Для определения f необходимо знать зависимость времени взаимодействия τ от спектральной функции энергии. Для несжимаемой жидкости эта связь определяется из оценки $\tau^{-1} \sim kV \sim \varepsilon^{1/2}$, что дает $f(\xi) = \xi^{2/3}$, $\varepsilon_k \sim k^{-5/3}$ — единственный случай, когда из формулы (9) исчезает скорость звука.

В рассматриваемом случае время взаимодействия определяется формулой (6), а спектр энергии — формулой (4), из этих формул следует $1/\tau \sim \varepsilon$. Отсюда имеем

$$P \sim \varepsilon^2, \quad f(\xi) = \xi^{1/2}, \quad \varepsilon_k \simeq \rho_0^{1/2}c^{1/2}P^{1/2}/k^{3/2}. \tag{10}$$

Как и для несжимаемой жидкости, интеграл $\int\limits_0^\infty \varepsilon_k dk$ расходится в области малых k. В соответствии с этим можно разделить k-пространство на энергосодержащую, инерционную и диссипативную области; спектр (10) осуществляется в инерционной области.

2. Сравним теперь полученный результат с тем, что дает теория слабой турбулентности. В этой теории величина $n_k = \langle |a_k|^2 \rangle$ подчиняется кинетическому уравнению

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 2\pi \int |V_{kk_1k_2}|^2 \{(n_{k_1}n_{k_2} - n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2})\, \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\delta_{\omega_k-\omega_{k_1}-\omega_{k_2}} +$$
$$+ 2(n_{k_1}n_{k_2} + n_k n_{k_2} - n_k n_{k_1})\, \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\delta_{\omega_k+\omega_{k_1}-\omega_{k_2}}\}\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (11$$
$$\varepsilon_k = 4\pi k^2 \omega_k n_k.$$

Произведем усреднение по углам в k-пространстве. В результате δ-функция от волновых чисел заменится на множитель $f(k, k_1, k_2) = 2\pi / kk_1k_2$.

Видно, что в уравнении (11) можно, не опасаясь противоречий, пренебречь дисперсией и считать $\omega_k = ck$; $\varepsilon_k = 4\pi c k^3 n_k$. После этих упрощений уравнение (11) может быть преобразовано к виду

$$\partial\varepsilon_k / \partial t + \partial P_k / \partial k = 0; \qquad (12)$$

$$P_k = -16\pi^3 \int\limits_0^k k'dk' \int\limits_{k-k'}^{\infty} |V_{k'k_1k_2}|^2 / (k'k_1k_2)\, k'^2 k_1^2 k_2^2 \times$$
$$\times (n_{k_1}n_{k_2} + n_{k'}n_{k_2} - n_{k'}n_{k_1})\, \delta_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \qquad (13)$$

Чтобы получить колмогоровский спектр, нужно решить уравнение $P_k = P$. Решение этого уравнения имеет вид $\varepsilon_k = 4\pi\lambda c^{1/2}\rho_0^{1/2}P^{1/2} / k^{3/2}$ и совпадает с формулой (10).

Для вычисления константы λ воспользуемся приближенным выражением (7) для ядра $V_{kk_1k_2}$.

После преобразований имеем

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{9}{8}(1+q)^2 \int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+\xi)}{\xi^{3/2}(1+\xi)^{5/2}} [(1+\xi)^{3/2} - \xi^{3/2} - 1]\, d\xi,$$

что дает

$$\lambda \approx 0{,}2 / (1+q). \qquad (14)$$

Заметим, что результат $\varepsilon_k \sim k^{-3/2}$ (без вычисления коэффициентов) был получен для слабой турбулентности в работе ([1]).

3. Рассмотрим теперь двумерную акустическую турбулентность. Все изложенные выше соображения о характере взаимодействия звуковых волн справедливы и для двумерного случая. С волной, имеющей волновой вектор $\mathbf{k}_0$, будут взаимодействовать только волны, волновые векторы которых лежат вблизи k_0 в угле $k_\perp^0 / k_0$, где $k_\perp^0$ определяется формулой (5). Однако оценка для времени нелинейного взаимодействия будет теперь другой. Очевидно,

$$1/\tau \sim Va^{*2}k_0k_\perp^0 \sim (Va^*)^{3/2}k_0^3 \sim \varepsilon_k^{3/4}.$$

Формула для спектра энергии в двумерном случае имеет по-прежнему вид (9), под ρ_0 надо понимать двумерную плотность массы. Пользуясь результатом $1/\tau \sim \varepsilon^{3/4}$, получаем

$$P \sim \varepsilon^{7/4}, \quad f(\xi) = \xi^{4/7}, \quad \varepsilon_k \approx \rho_0^{3/7}c^{2/7}P^{4/7}k^{-11/7}.$$

При наличии дисперсии можно рассмотреть и двумерную слабую турбулентность. Однако она сильно отличается от трехмерной. Хотя кинетическое уравнение (11) и сохраняет вид для двумерной турбулентности, но при усреднении δ-функции от волновых чисел по углам возникает множитель $f_{kk_1k_2} = 2 / \Delta(k, k_1, k_2)$, где $\Delta(k, k_1, k_2)$ — площадь треугольника, образованная векторами $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$. В отсутствие дисперсии взаимодействуют только волны, направленные вдоль одной прямой, для них $\Delta(k, k_1, k_2) = 0$, и ядро кинетического уравнения обращается в бесконечность. Поэтому в двумерной слабой турбулентности не существует предельного перехода при $\varepsilon \to 0$.

Заметим, что для применимости построенной выше теории не обязательно требование изотропии турбулентности. Достаточно, чтобы функция распределения $n(k)$ мало менялась на углах порядка характерного угла взаимодействия. Это тем более важно, что изотропизация спектра акустической турбулентности должна происходить за счет процессов более высокого порядка по нелинейности, чем установление стационарного состояния по модулю k, и может оказаться весьма медленным процессом.

Авторы благодарят акад. Я. Б. Зельдовича, обратившего их внимание на возможные астрофизические приложения акустической турбулентности.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения
Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
31 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Е. Захаров, Прикл. мех. и техн. физ., № 4, 35 (1965). [2] А. Н. Колмогоров, ДАН, 30, № 4, 299 (1941). [3] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 5, № 4, 453 (1941).