Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

МАТЕМАТИКА

П. К. БЕЛОБРОВ

О ЧЕБЫШЕВСКОЙ ТОЧКЕ СИСТЕМЫ ПЛОСКОСТЕЙ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 IX 1969)

Рассматривается задача о минимуме выпуклого, непрерывного и неотрицательного функционала $f(x)$, заданного на банаховом пространстве X и у которого множество $L = \{x \mid f(x) = f(0),\ x \in X\}$, линейно, причем $f(z + x) = f(z)$ для любого элемента $x \in L$. Множество L будем называть подпространством постоянства функционала $f(x)$. Примером функционала такого типа является $\sup\limits_{i \in I} \rho(x, H_i)$, где $H_i = x_i + L_i$, $i \in I$, L_i — подпространство из X, $x_i \in X$, $\rho(x, H_i)$ — расстояние от x до H_i. Для этого функционала подпространством постоянства служит $\bigcap\limits_{i \in I} L_i$, а точка $x^* \in X$, для которой $\sup\limits_{i \in I} \rho(x^*, H_i) = \inf\limits_{x \in X} \sup\limits_{i \in I} \rho(x, H_i)$, называется чебышевской для системы плоскостей H_i, $i \in I$. Алгоритмы для нахождения такой точки в случае конечномерного пространства были разработаны С. И. Зуховицким ([1]); доказательство ее существования для конечного $I = \{1, \ldots, n\}$, произвольного банахова пространства и когда L_i, $i \in I$, единичного дефекта (индекса), было дано А. Л. Гаркави ([2]).

Другим важным примером функционала, обладающего подпространством постоянства, является $\|Ux - y\|$, где U — линейный и непрерывный оператор из X в банахово пространство Y, y — фиксированный элемент из Y; для этого функционала подпространством постоянства служит множество нулей оператора U.

Приведем следующее условие:

(1). Для любого числа $r > 0$ существует число $R > 0$ такое, что из неравенства $f(x) \leqslant r$ вытекает неравенство $\rho(x, L) \leqslant R$.

Для функционала $\sup\limits_{i \in I} \rho(x, H_i)$ это условие формулируется так:

(1$^+$). Для любого числа $r > 0$ существует число $R > 0$ такое, что из неравенств $\rho(x, L_i) \leqslant r$, $i \in I$, вытекает неравенство $\rho(x, \bigcap\limits_{i \in I} L_i) \leqslant R$.

Для выполнимости условия (1) у функционала $\|Ux - y\|$ достаточна, а если подпространство U фактор-рефлексивно *, то и необходима замкнутость области значений оператора U.

Теорема 1. *Для того чтобы для подпространств $L_1, \ldots, L_m$ выполнялось условие (1$^+$), достаточно (а при $m = 2$ и необходимо), чтобы сумма подпространств $\sum\limits_{i=1}^{m} L_i$ была замкнутой.*

При $m > 2$ условие (1$^+$) уже не является достаточным для замкнутости суммы подпространств.

Теорема 2. *Если у выпуклого, непрерывного и неотрицательного функционала $f(x)$ подпространство постоянства фактор-рефлексивно и*

---

* Подпространство $L \subset X$ называется фактор-рефлексивным ([3]), если рефлексивно фактор-пространство X / L.

удовлетворяет условию (1), *то существует точка* $x^* \in X$ *такая, что* $\inf_{x \in X} f(x) = f(x^*)$.

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие. *Пусть* $\bigcap_{i=1}^{m} L_i$ — *фактор-рефлексивное подпространство. Для того чтобы для любых плоскостей* $H_i = x_i + L_i$, $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, m$, *существовала чебышевская точка, достаточно* (*а при* $m = 2$ *и необходимо*), *чтобы сумма* $\sum_{i=1}^{m} L_i$ *была замкнута* (*выполнялось условие* (1^+)).

При $m > 2$ *эти условия не являются необходимыми.*

Пусть, далее, A_i — линейный и непрерывный оператор из X в банахово пространство Y_i; D_i, N_i, R_i — соответственно область определения, множество нулей и область значений оператора A_i, $i = 1, \ldots, m$, $\bigcap_{i=1}^{m} \neq \Lambda$. Обозначим через $\varphi(\ldots)$ какую-либо норму в m-мерном координатном пространстве.

Теорема 3. *Если пространство* $\bigcap_{i=1}^{m} N_i$ *фактор-рефлексивно и множества* $\sum_{i=1}^{m} N_i$, $\bigcap_{i=1}^{m} D_i$, R_i, $i = 1, \ldots, m$, *замкнуты, то в* $\bigcap_{i=1}^{m} D_i$ *существует точка, доставляющая минимум функционалу* $\varphi(\|A_1 x - y_1\|, \ldots, \|A_m x - y_m\|)$, *каковы бы ни были фиксированные элементы* $y_i \in Y_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 4. *Каковы бы ни были система функционала* $f_1, \ldots, f_n \subset X^*$ *и система чисел* $c_1, \ldots, c_n$, d, *где* $d \geqslant 0$, *существует система точек* $x_1^*, \ldots, x_m^*$ (*m фиксировано*), *для которой*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \min_{1 \leqslant j \leqslant m} |f_i(x_j^*) - c_2| = \inf_{x_1, \ldots, x_m \subset X,\ \max\limits_{i, j \leqslant m} \|x_i - x_j\| \leqslant d} \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \min_{1 \leqslant j \leqslant m} |f_i(x_j) - c_i|.$$

Отсюда при $m = 1$ и $d = 0$ (как, впрочем, и из следствия и теоремы 3) вытекает существование чебышевской точки конечной системы гиперплоскостей. Задача о нахождении такой точки в данном случае может быть сведена к решению определенной системы уравнений. Именно, пусть система функционалов $f_1, \ldots, f_n \subset X^*$ линейно независима, $f_{n+i} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(i)} f_k$, $i = 1, \ldots, m$, система чисел $c_1, \ldots, c_{n+m}$ произвольна. Обозначим $\mu_i = c_{n+i} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(i)} c_k$, $i = 1, \ldots, m$, и пусть, например, $\mu_1 \neq 0$. Методом линейного программирования найдем величину $N = \max\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(1)} x_k - x_{n+1}\right)$, где max берется по всем системам чисел $x_1, \ldots, x_{n+m}$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k^{(i)} - \frac{\mu_i}{\mu_1} \lambda_k^{(1)}\right) x_k + \frac{\mu_i}{\mu_1} x_{n+1} - x_{n+i} = 0, \qquad i = 2, \ldots, m,$$

и неравенствам $|x_k| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n + m$; кроме того, найдем систему чисел $x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0$, на которой величина N достигается.

Теорема 5. *Всякое решение определенной системы*

$$f_\nu(x) = c_\nu - \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(1)} c_k - c_{n+1}\right) \frac{x_\nu^0}{N}, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

является чебышевской точкой для системы гиперплоскостей $f_j(x) = c_j$, $j = 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m$. *Если система чисел* $x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0$ *единственная, то верно и обратное.*

Выражаю благодарность А. Л. Гаркави за внимание к работе и ценные советы.

Ростовский инженерно-строительный институт

Поступило 16 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. И. Зуховицкий, ДАН, 139, № 3 (1961). [2] А. Л. Гаркави, Сборн. математич. статей, Военно-инженерная академия им. В. В. Куйбышева, 1968. [3] А. Л. Гаркави, Матем. сборн., 62 (104), № 1 (1963).