Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 517.954.4:517.937+513.88

МАТЕМАТИКА

Е. А. БЕГОВАТОВ

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 8 X 1969)

Пусть H — пространство Гильберта. Рассмотрим множество всех интегрируемых по Бохнеру функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ со значениями из H. Это множество образует новое гильбертово пространство H_1, если скалярное произведение в нем определить равенством

$$(f, g)_{H_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f(x), g(x))_H\, dx.$$

Рассмотрим в пространстве H_1 дифференциальный оператор

$$L\varphi = [d^2/dx^2 - Q(x)]\varphi, \tag{1}$$

определенный на множестве функций из H_1 со значениями из D (здесь D — область определения оператора $Q(x)$) и имеющих сильную вторую непрерывную производную.

В настоящей заметке определяется условия на семейство линейных, вообще говоря, неограниченных в H операторов $Q(x)$, при которых дифференциальный оператор (1) (точнее его замыкание) является производящим оператором сильно непрерывной сжимающей полугруппы. Также будет показано, что резольвента этого оператора — интегральный оператор с некоторым ядром, который по аналогии со скалярным случаем называется операторной функцией Грина.

Будем предполагать, что:

α. Замкнутый линейный оператор $Q(x)$ при каждом $x \in R$ имеет плотную в H, не зависящую от x область определения D, и при любом $\lambda \geqslant 0$ оператор $Q(x) + \lambda I$ имеет ограниченный обратный. Оператор $Q(x)$ равномерно ограничен снизу

$$\operatorname{Re}(Q(x)\varphi, \varphi)_H \geqslant \delta(\varphi, \varphi)_H, \quad \varphi \in D.$$

Условие независимости области определения D от x в силу теоремы о замкнутом графике влечет за собой ограниченность в H оператора $Q(x)\cdot$ $\cdot Q^{-1}(y)$, причем норма этого оператора, вообще говоря, ограничена константой, зависящей от x и y. Следующее условие налагает ограничение на рост этой константы.

β. Существуют постоянные C и $k > 0$ такие, что

$$\|Q(x)Q^{-1}(y)\| \leqslant C\exp\{k|x-y|\}$$

и оператор $Q(x)Q^{-1}(y)$ при $|x-y| < 1$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\|[Q(x) - Q(y)]Q^{-1}(y)\| \leqslant C|x-y|^{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0, 1];$$

кроме того,

$$\|Q^{-1-\delta}(x)[Q(x) - Q(y)]\| \leqslant C|x-y|^{\varepsilon}, \quad \delta < \varepsilon,$$

или

$$\|[Q^{1/2}(x) - Q^{1/2}(y)]Q^{-1/2}(y)\| \leqslant C|x-y|^{\varepsilon}.$$

Пусть $Q_R = {}^1/_2(Q + Q^*)$ и $Q_I = \frac{1}{2i}(Q - Q^*)$ — вещественная и мнимая компоненты оператора Q. Наложим дополнительные ограничения на эти компоненты.

γ. Операторы Q_R и Q_I полуограничены на плотном в H множестве и одно из трех самосопряженных расширений в смысле Фридрихся $\tilde{Q}_R$, $\tilde{Q}_I$ или $\widetilde{Q_R + Q_I}$ обладает вполне непрерывной резольвентой, причем наименьшее собственное число $\alpha_1(x)$ удовлетворяет условию А. М. Молчанова

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_x^{x+\omega} \alpha_1(x)\,dx = \infty \quad \text{для любого } \omega > 0.$$

Условие α позволяет построить оператор $\chi(x) = \{Q(x) + \mu^2 I\}^{1/2}$, резольвентное множество которого — вся правая полуплоскость ([1]). Оператор χ в этом случае порождает сильно непрерывную сжимающую полугруппу $U_\mu{}^x(t) = \exp\{-t\chi(x)\}$, для которой выполняется

$$\|\chi^\alpha \exp\{-t\chi\}\| \leqslant Ct^{-\alpha} \exp\{\gamma\mu t\}, \quad \alpha \geqslant 0, \tag{2}$$

причем $\gamma > 0$ и не зависит от $\mu > \mu_0$ и $t > 0$. Используя, кроме того, условие β и (2), можно показать, что

$$\|Q^{-\beta}(x)\,[Q^\alpha(x) - Q^\alpha(y)]\| \leqslant C|x-y|^\varepsilon \quad \text{при } \beta - \delta > \alpha; \tag{3}$$

$$\|\,Q^{1/2}(x)\,[U_\mu^x(t+\Delta t) - U_\mu^x(t)]\,\| \leqslant C\{\Delta t\}\,t^{-2}\exp\{-\gamma\mu t\}; \tag{4}$$

$$\|\chi^n(x)\,[U_\mu^x(t) - U_\mu^y(t)]\,\chi^{-k}(y) \leqslant C\,\frac{|x-y|^\varepsilon}{t^{n+\delta-k}} \exp\{-\gamma\mu t\}, \tag{5}$$

где $n = 0, 1, 2$; $k = 0, 1$; $n - k \leqslant 1$ и $\delta < \varepsilon$. Из условия β и (2) следует, что для любых $x \neq y \in R$

$$\|[Q(x) - Q(y)]\,Q^{-1/2}(y)\,U_\mu^y(|x-y|)\| \leqslant \frac{C\exp\{-\gamma\mu|x-y|\}}{|x-y|^{1-\varepsilon}},$$

поэтому интегральное уравнение

$$G(x,y,\mu) = F(x,y,\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} G(x,z,\mu)\,[Q(y) - Q(x)]\,F(z,y,\mu)\,dz,$$

$$F(x,y,\mu) = {}^1/_2\,\chi^{-1}(y)\,e^{-|x-y|\,\chi(y)} \tag{6}$$

имеет единственное решение $G(x, y, \mu)$, которое определяется по формуле

$$G(x,y,\mu) = F(x,y,\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} F(x,z,\mu)\,\Phi(z,y,\mu)\,dz, \tag{7}$$

где $\Phi(x, y, \mu)$ — некоторый оператор, для которого справедливо неравенство: для любого $\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \eta < \varepsilon$

$$\|\Phi(x+\Delta x, y, \mu) - \Phi(x, y, \mu)\| \leqslant C|\Delta x|^{\varepsilon-\eta}|x-y|^{\varepsilon-1}, \quad |x-y| < 1.$$

Теорема 1. *Если положительное число μ достаточно велико и выполняются условия α и β, то уравнение* (6) *имеет единственное решение $G(x, y, \mu)$, которое является функцией Грина для уравнения*

$$[L - \mu^2 I]\varphi = -f,$$

т. е. для любой функции $f \in H_1$, удовлетворяющей условию Гёльдера, интеграл

$$g = Af = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,\mu)\,f(y)\,dy \tag{8}$$

дает решение уравнения (7).

Доказательство теоремы основано на методе П. Е. Соболевского ([2]), при этом используются результаты ([1]). При доказательстве существования второй непрерывной сильной производной по x операторной функции $G(x, y, \mu)$ существенны равномерная по x ограниченность и непрерывность оператора $\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(x) F(x, y, \mu)\, dy$, которые следуют из неравенств (2), (3) и (5).

Так как множество функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Гёльдера, плотно в H_1, то из теоремы Б. М. Лидского ([3], стр. 110) и Б. М. Левитана и Г. А. Суворченковой ([4], стр. 56) следует, что оператор (8) вполне непрерывен в H_1, если семейство операторов $Q(x)$ удовлетворяет, кроме того, и условию γ. Из условия α легко получить, что в H_1 справедливо неравенство

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(Af, f)_{H_1} \leqslant \frac{(f, f)_{H_1}}{\delta + \mu}.$$

Поэтому, в силу сказанного выше, μ — регулярная точка оператора A ([5], стр. 302), и интегральное уравнение

$$G(x, y) = G(x, y, \mu) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x, z, \mu)\, G(z, y)\, dz \tag{9}$$

имеет единственное решение.

Разбивая интегральный оператор в (9) на конечномерный оператор и интегральный оператор, норма которого достаточна мала, можно показать, что оператор $G(x, y)$ равномерно ограничен в H. В силу свойств операторной функции Грина $G(x, y, \mu)$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *При выполнении условий* α, β, γ *существует единственная функция Грина* $G(x, y)$ *задачи* $L\varphi = -f$.

Расширение по непрерывности интегрального оператора, порожденного операторной функцией Грина $G(x, y)$, на все H_1 приводит к некоторому замкнутому расширению оператора L, область значений которого есть все H_1. Если использовать условие α и теорему Хилле — Иосида ([1], стр. 109), можно получить

Следствие 1. *В предположениях теоремы 2 замыкание оператора* $\bar{L}$ *является производящим оператором сильно непрерывной сжимающей полугруппы* $T_t = \exp\{-t\bar{L}\}$, *при этом*

$dT_t v / dt = d^2 T_t v / dx^2 - Q(x) T_t v$ *для любого* $v \in D(L)$ *и* $t > 0$.

Если обозначить полугруппы, порожденные оператором d^2/dx^2 и $Q(x)$, через R_t и Q_t соответственно, то, применяя теорему Троттера ([6]), можно получить представление полугруппы T_t через R_t и Q_t.

Следствие 2. *В предположениях теоремы 2 справедливо равенство* $T_t v = \lim\, (R_h Q_h)^{[t/h]} v$ *для любого* $v \in H_1$.

Замечание 1. Если использовать результат статьи ([7]), то можно несколько ослабить условие γ.

Замечание 2. В случае самосопряженного оператора $Q(x)$ результаты, аналогичные теореме 1, были получены в ([8]), а в случае конечного интервала результаты, аналогичные теоремам 1 и 2,— в ([9]).

В заключение пользуюсь случаем выразить признательность Б. М. Левитану, беседы с которым существенно способствовали написанию данной работы.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
3 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, М., 1967. [2] П. Е. Соболевский, Тр. Моск. матем. общ., **10**, 297 (1961). [3] В. Б. Лидский, Тр. Моск. матем. общ., 8, 84 (1959). [4] Б. М. Левитан, Г. А. Суворченкова, Функциональн. анализ и его прилож., 2, № 2 (1968). [5] М. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию несамосопряженных операторов, М., 1965. [6] H. F. Trotter, Proc. Am. Math. Soc., **10**, № 4 (1959). [7] В. П. Маслов, Функциональн. анализ и его прилож., **2**, № 2 (1968). [8] Б. М. Левитан, Матем. сборн., **76** (118), 2 (1968). [9] Г. И. Лаптев, Литовск. матем. сборн., 8, № 1 (1968).