Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 62.501.12

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

А. Г. БУТКОВСКИЙ

ФИНИТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 24 IX 1969)

Интересной задачей финитного управления (т. е. управления на конечном отрезке времени $[0, T]$) [1, 2] является задача успокоения колебаний в разветвленной и взаимосвязанной сети одномерных колебательных систем (в частности, энергосети с несколькими электростанциями и потребителями, связанными между собой длинными линиями электропередач),

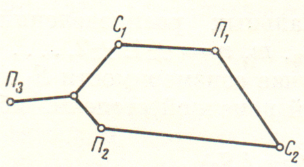

Рис. 1

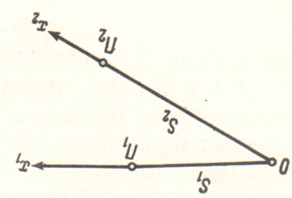

Рис. 2

например, сеть, изображенная на рис. 1. Здесь C_1 и C_2 означают электростанции, а $П_1$, $П_2$, $П_3$ — потребители.

Рассмотрим простейшую задачу такого типа (рис. 2), когда имеется только одно управление в точке C и две линии длины S_1 и S_2 с «закрепленными» концами $П_1$ и $П_2$. Точная постановка такой задачи в этом простейшем случае состоит в следующем. Пусть колебания в линиях S_1 и S_2 описываются соответственно функциями

$$Q_1(x_1, t), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant S_1,$$
$$Q_2(x_2, t), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant S_2,$$

при $t \geqslant 0$.

Уравнения для этих функций имеют вид:

$$\ddot{Q}_1 = Q_1'', \quad 0 < x_1 < S_1, \quad t > 0, \tag{1}$$
$$\ddot{Q}_2 = Q_2'', \quad 0 < x_2 < S_2, \quad t > 0, \tag{2}$$

где точками обозначены частные производные по времени t, а штрихами — частные производные по пространственным переменным x_1 и x_2.

Граничные и начальные условия имеют вид:

$$Q_1(0, t) = Q_2(0, t) = u(t), \tag{3}$$

$$Q_1(S_1, t) = Q_2(S_2, t) = 0, \tag{4}$$

$$Q_1(x_1, 0) = Q_{01}(x_1), \qquad \dot{Q}_1(x_1, 0) = Q_{11}(x_1), \tag{5}$$

$$Q_2(x_2, 0) = Q_{02}(x_2), \qquad \dot{Q}_2(x_2, 0) = Q_{12}(x_2), \tag{6}$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant S_1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant S_2, \quad t \geqslant 0.$$

Задача финитного управления состоит в том, чтобы успокоить эти системы с помощью управления $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е. получить условия

$$Q_1(x_1, T) = \dot{Q}_1(x_1, T) = 0, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant S_1, \tag{7}$$

$$Q_2(x_2, T) = \dot{Q}_2(x_2, T) = 0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant S_2. \tag{8}$$

Первый существенный вопрос, который возникает при решении этой задачи: управляема ли эта система? Иными словами: существует ли финитное управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при конечном T и произвольных начальных условиях (5), (6)? Оказывается, что методом финитного управления эта задача решается весьма просто, и ответ отрицательный. Действительно, интерполяционная проблема для этой задачи, как следует из формул (13) в [1], имеет вид

$$\tilde{u}(m\pi / S_1) = \beta_{1m}, \quad \tilde{u}(n\pi / S_2) = \beta_{2n}, \quad m, n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{9}$$

где числа β_{1m} и β_{2n} вычисляются по формуле (14) в работе [1] с соответствующими изменениями переменных, в которой для вычисления β_{1m} надо вместо $Q_0(x)$ положить $Q_{01}(x_1)$, вместо $Q_1(x)$ положить $Q_{11}(x_1)$, а для вычисления β_{2n} вместо $Q_0(x)$ взять $Q_{02}(x_2)$, а вместо $Q_1(x)$ взять $Q_{12}(x_2)$. Из (9) сразу видно, что если числа S_1 и S_2 соизмеримы, то для любого $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ найдется такое m из последовательности $\pm 1, \pm 2, \ldots$, что

$$m / S_1 = n / S_2. \tag{10}$$

Так как в силу произвольности начальных распределений $Q_{01}(x_1)$, $Q_{11}(x_1)$, $Q_{02}(x_2)$ и $Q_{12}(x_2)$ числа β_{1m} и β_{2n}, m, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, различны, то интерполяционная проблема (9) в случае соизмеримости S_1 и S_2 неразрешима в целых функциях $\tilde{u}(z)$ заданной конечной степени, ибо должно выполняться равенство

$$\tilde{u}(m\pi / S_1) = \tilde{u}(n\pi / S_2),$$

когда, вообще говоря, в то же время $\beta_{1m} \neq \beta_{2n}$.

Можно также показать, что данная интерполяционная проблема (9) неразрешима и в случае несоизмеримых S_1 и S_2. Это можно легко показать от противного, используя тот факт, что целая функция конечной степени, принадлежащая на действительной оси $L_2(-\infty, \infty)$, имеет ограниченную производную [3].

Аналогично можно показать, что система останется неуправляемой, если добавить новое управление $v(t)$ на правых концах отрезков $[0, S_1]$ и $[0, S_2]$, т. е. если условие (4) заменить условием

$$Q_1(S_1, t) = Q_2(S_2, t) = v(t), \quad t \geqslant 0. \tag{11}$$

В этом случае интерполяционная проблема имеет вид

$$\tilde{u}(m\pi / S_1) - (-1)^m \tilde{v}(m\pi / S_1) = \beta_{1m}, \tag{12}$$

$$\tilde{u}(n\pi / S_2) - (-1)^n \tilde{v}(n\pi / S_2) = \beta_{2n}, \tag{13}$$

$$m, n = \pm 1, \pm 2, \ldots, n,$$

откуда видно, что в случае соизмеримых S_1 и S_2 можно найти такие m и n, что левые части уравнений (12) и (13) будут одинаковы, в то время как правые части β_{1m} и β_{2n}, вообще говоря, различны. Неразрешимость интерполяционной проблемы (12) и (13) можно также показать и в случае несоизмеримых S_1 и S_2.

Автор выражает благодарность проф. С. Ролевичу за плодотворное обсуждение рассмотренных здесь проблем управляемости.

Институт автоматики и телемеханики
(технической кибернетики)
Москва

Поступило
20 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Бутковский, ДАН, 188, № 3 (1969). [2] А. Г. Бутковский, Л. Н. Поставский, Автоматика и телемех., № 4 (1969). [3] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.