Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 3

УДК 532.517.45

ГИДРОМЕХАНИКА

Б. Я. ЛЮБИМОВ, Ф. Р. УЛИНИЧ

К ПРОБЛЕМЕ ЗАМЫКАНИЯ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(Представлено академиком М. Д. Миллионщиковым 4 VIII 1969)

Одна из схем приближенного замыкания системы зацепляющихся уравнений для моментов основывается на предположении о том, что эйлерово поле скорости жидкости близко к нормально распределенному. Безкумулянтное приближение n-го порядка состоит в пренебрежении кумулянтами моментов более высокого порядка ([1]).

Для теории турбулентности, сформулированной в виде системы зацепляющихся уравнений для совместных распределений вероятности значений поля скорости в совокупности фиксированных точек или других случайных величин, характеризующих поток ([2]), можно построить метод замыкания, сходный с квазинормальным приближением для системы моментов Фридмана — Келлера.

Уравнение для функции распределения n случайных величин содержит обычно, помимо n-й функции, функцию распределения $(n+1)$-й величины. Схема замыкания цепочки уравнений состоит в построении замкнутой системы уравнений для конечного числа функций распределения.

Отличный от ([3]) вариант замыкания можно предложить на основе точного разложения для совместного распределения вероятности связанных величин. Именно, для характеристической функции распределения φ_{12} двух случайных величин u_1 и u_2 можно написать

$$\varphi_{12}(\theta_1, \theta_2) = \varphi_1(\theta_1)\varphi_2(\theta_2)\exp\left[\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{S_{k,l}}{k!\, l!}(i\theta_1)^k (i\theta_2)^l\right]. \qquad (1)$$

Здесь S_{kl} представляет собой кумулянт момента $\langle u_1{}^k u_2{}^l\rangle$. Выражение (1) является частично просуммированным по кумулянтам S_{0m} и S_{q0} полным разложением характеристической функции

$$\varphi_{12} = \exp\left[\sum_{k,\, l=0}^{\infty} \frac{S_{kl}}{k!l!}(i\theta_1)^k (i\theta_2)^l\right],$$

при этом $\varphi_1(\theta_1) = \varphi_{12}(\theta_1, \theta_2 = 0)$ и $\varphi_2(\theta_2) = \varphi_{12}(\theta_1 = 0, \theta_2)$. Соответствующее обращение разложения (1) имеет вид

$$P_{12}(u_1, u_2) = \exp\left[\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{S_{kl}}{k!\, l!}\frac{\partial^{k+l}}{\partial u_1^k \partial u_2^l}\right] P_1(u_1) P_2(u_2). \qquad (2)$$

Величины

$$P_1 = \int P_{12}(u_1, u_2)\, du_2, \quad P_2(u_2) = \int P_{12}(u_1, u_2)\, du_1$$

являются точными функциями распределения величин u_1 и u_2 соответственно. В сущности, оператор

$$\exp\left[\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{S_{kl}}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}}{\partial u_1^k \partial u_2^l}\right]$$

является разностным интегральным оператором. Обобщение на случай большего числа переменных очевидно.

Возможные способы замыкания могут состоять в ограничении конечным числом кумулянтов в (2). Систему уравнений для функций распределения скоростей F_n в n фиксированных точках можно, например, замкнуть, если ограничиться простейшими кумулянтами в разложении функции распределения F_3 скоростей V_1, V_2, V_3 в трех точках x_1, x_2, x_3

$$F_3 = \exp\left[S_{11}^{\alpha\beta}(x_1, x_3)\frac{\partial^2}{\partial V_1^\alpha \partial V_3^\beta} + S_{11}^{\alpha\beta}(x_2, x_3)\frac{\partial^2}{\partial V_2^\alpha \partial V_3^\beta}\right] F_2(V_1, x_1, V_2, x_2) F_1(V_3, x_3); \tag{3}$$

здесь $S_{11}{}^{\alpha\beta}(x_i, x_3) = \langle V_i{}^\alpha V_3{}^\beta \rangle - \langle V_i{}^\alpha V_3{}^\beta \rangle$, $i = 1, 2$. В этом случае, поскольку кумулянты полностью выражаются через F_2 и F_1, получаем для последних замкнутые уравнения.

Конкретные предположения об обрыве ряда кумулянтов должны удовлетворять дополнительным условиям: сохранению нормировки, симметрии (если рассматриваемые функции симметричны по отношению к перестановке каких-либо групп аргументов), несжимаемости и положительной определенности вводимых приближенных функций; например, выражение (3) для F_3 сохраняет нормировку распределений, но не является симметричным. Естественно, что схема замыкания должна соответствовать правдоподобным представлениям о структуре поля скорости.

Примером физически и экспериментально более обоснованного способа расцепления может служить метод замыкания, основанный на явлении приближенной статистической независимости субстанциального ускорения, определяемого в основном мелкомасштабными движениями, от скорости в данной точке. Первое уравнение цепочки для совместных распределений величин V, $\dot{V} = A_1$, $\ddot{V} = A_2, \ldots$, где точка означает полную производную по времени, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial F_1}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial V^\alpha}\int F_2(V, A_1, x) A_1^\alpha dA_1 = 0. \tag{4}$$

Совместное распределение скорости и ускорения F_2 можно, как уже говорилось, представить в виде

$$F_2 = \exp\left[\sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{S_{kl}^{\alpha\beta}}{k!\,l!} \frac{\partial^{k+l}}{(\partial V^\alpha)^k (\partial A_1^\beta)^l}\right] F_1(V)\,\Phi_1(A_1),$$

где $F_1(V)$ и $\Phi_1(A_1)$ — точные функции распределения скорости и ускорения в точке x, а $S_{kl}{}^{\alpha\beta}$ — кумулянты соответствующих корреляционных моментов. Предположение о приближенной статистической независимости скорости и ускорения можно реализовать, считая кумулянты $S_{kl}{}^{\alpha\beta}$ малыми и убывающими. Ограничиваясь первыми членами разложения, находим приближенное выражение для F_2

$$F_2(V, A_1) = F_1(V)\,\Phi_1(A_1) + S_{11}^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial F_1}{\partial V^\alpha}\frac{\partial \Phi_1}{\partial A_1^\beta}.$$

Подставляя это выражение в (4), получим следующее уравнение для $F_1(V)$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial F_1}{\partial x^\alpha} + S_{11}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 F_1}{\partial V^\alpha \partial V^\beta} + S_{01}^\alpha \frac{\partial F_1}{\partial V^\alpha} = 0,$$

$$S_{11}^{\alpha\beta} = \langle V^\alpha A_1^\beta \rangle - \langle V^\alpha \rangle \langle A_1^\beta \rangle, \quad S_{01}^\alpha = \langle A_1^\alpha \rangle. \tag{5}$$

Уравнение (5) содержит неизвестный момент $S_{11}{}^{\alpha\beta}$, который не выражается через $F_1(V)$, поэтому полученное уравнение не является, вообще говоря замкнутым, и для кумулянта $S_{11}{}^{\alpha\beta}$, определяемого в случае локально однородной турбулентности диссипацией $\varepsilon(x, t)$ как $S_{11}{}^{\alpha\beta} = {}^1/_3\varepsilon(x, t)\,\delta_{\alpha\beta}$ необходимо дополнительное уравнение.

Поступило
11 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Д. Миллионщиков, ДАН 32, 611 (1941). [2] Ф. Р. Улинич, ДАН, 183, 535 (1968); А. С. Монин, ПММ, 31, 1057 (1968); Б. Я. Любимов, ДАН, 184, 1069 (1969). [3] Ф. Р. Улинич, Б. Я. Любимов, ЖЭТФ, 55, 951 (1968).