Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

МАТЕМАТИКА

ВЕРНЕР ВОЛЬФ

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком Ю. В. Линником 8 X 1969)

1. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с конечными дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$, не все из которых равны нулю. Без ограничения общности будем считать, что математические ожидания равны нулю: $EX_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Введем следующие обозначения

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad Z_n = B_n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j, \quad L_n = B_n^{-3} \sum_{j=1}^n EX_j^3,$$

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{Z_n < x\}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

В настоящей заметке приводится ряд интегральных и локальных теорем для больших уклонений для классов функций, введенных Ю. В. Линником [1].

2. Рассмотрим неубывающие функции $h(x)$, заданные при $x > 1$ и принадлежащие одному из трех следующих классов *.

Класс I. $h(x)$ — функции с непрерывными первыми производными, удовлетворяющие условиям

$$(\ln x)^{2+\zeta_0} \leqslant h(x) < x^{1/2},$$

где ζ_0 — положительная постоянная, которая может быть сколь угодно малой.

Далее, положим

$$h(x) = \exp\{H(\ln x)\}$$

и наложим на $H(z)$ следующие условия: $H(z)$ — монотонная дифференцируемая функция; $H'(z) \leqslant 1$; $H'(z) \to 0$ при $z \to \infty$; $H'(z) \exp\{H(z)\} > c_1 z^{1+\zeta_1}$, где c_1 и ζ_1 — положительные постоянные.

Класс II. $h(x)$ — функции, удовлетворяющие условиям:

$$\rho_0(x) \ln x \leqslant h(x) \leqslant (\ln x)^2,$$
$$h(x) = M(x) \ln x = N(\ln x) \ln x,$$

$N'(z)$ монотонная; $N'(z) \to 0$ при $z \to \infty$; $\rho_0(x)$ — сколь угодно медленно возрастающая до ∞ функция.

Класс III. $h(x)$ функции, удовлетворяющие условиям

$$3 \ln x \leqslant h(x) \leqslant K \ln x,$$

где $K \geqslant 3$ — константа.

---

* В работе [1] не предполагаются выполненными непрерывность $h'(x)$ из класса I и монотонность $N'(z)$ из класса II.

Введем в рассмотрение условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E \exp\{h(|X_j|)\} < \infty. \tag{1}$$

Определим функции $\Lambda(n)$ для каждого из трех рассмотренных выше классов с помощью уравнений

$$h(\sqrt{n}\Lambda(n)) = (\Lambda(n))^2, \tag{2}$$

$$\sqrt{h(n)} = \sqrt{M(n)\ln n} = \Lambda(n), \tag{3}$$

$$\Lambda(n) = \sqrt{\ln n} \tag{4}$$

соответственно.

3. Пусть задана функция $h(x)$ класса I.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1), (2) *и условие*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B_n^2}{n} > 0. \tag{5}$$

Тогда

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{6} L_n\right\}\left[1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{6}$$

$$\frac{F_n(-X)}{\Phi(-X)} = \exp\left\{-\frac{x^3}{6} L_n\right\}\left[1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right] \tag{7}$$

при $n\to\infty$ в области $0 \leqslant x \leqslant \Lambda(n)/\rho(n)$, где $\rho(n)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \rho(n) = \infty. \tag{8}$$

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = 1$$

в области $0 \leqslant x \leqslant \Lambda(n)/\rho(n)$, какова бы ни была функция $\rho(n)$, удовлетворяющая условию (8).

Теорема 2. *Пусть*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B_n^2}{n} < \infty \tag{9}$$

и $\Lambda(n)$ определяется из (2). *Пусть, далее, существуют такие положительные постоянные b_1 и b_2 и такая функция $\rho(n)$, удовлетворяющая условию* (8), *что*

$$1 - F_n(x) \leqslant b_1 e^{-b_2 x^2}, \qquad F_n(-x) \leqslant b_1 e^{-b_2 x^2} \tag{10}$$

при $0 \leqslant x \leqslant \Lambda(n)\rho(n)$ и всех достаточно больших n.

Тогда

$$E \exp\{h(|X_j|)\} < \infty \tag{11}$$

для всех j.

Аналогичные теоремы справедливы для функций $h(x)$ класса II.

Пусть задана функция $h(x)$ класса III.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1), (4) *и* (5). *Тогда*

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)} \to 1, \qquad \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \to 1$$

при $n\to\infty$ в области $0 \leqslant x \leqslant \Lambda(n)/\rho(n)$, где $\rho(n)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (8).

Справедливо также утверждение, аналогичное теореме 2.

4. Приведем формулировки соответствующих локальных теорем. Введем обозначения:

$$v_j(t) = Ee^{itX_j}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Обозначим через $p_n(x)$ производную функции распределения $F_n(x)$, если $F_n(x)$ абсолютно непрерывна.

Пусть задана функция $h(x)$ класса I.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1), (2) *и* (5). *Пусть, далее, всякому* $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* $\delta > 0$, *что*

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |v_j(t)|\, dt = O\left(e^{-\delta(\Lambda(n))^2}\right) \quad (n \to \infty).$$

Тогда при всех достаточно больших n *существует всюду непрерывная плотность распределения* $p_n(x)$ *случайной величины* z_n *и, кроме того*

$$\frac{p_n(x)}{\varphi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{6} L_n\right\}\left[1 + O\left(\frac{|x|+1}{\sqrt{n}}\right)\right] \tag{12}$$

при $n \to \infty$ *в области* $|x| \leqslant \Lambda(n) / \rho(n)$, *где* $\rho(n)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая условию* (8).

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x)}{\varphi(x)} = 1$$

в области $|x| \leqslant \Lambda(n) / \rho(n)$, *какова бы ни была функция* $\rho(n)$, *удовлетворяющая условию* (8).

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (9), $\Lambda(n)$ *определяется из* (2) *и случайная величина* z_n *при некотором* $n = n_0$ *имеет непрерывное распределение с плотностью* $p_n(x)$. *Пусть, далее, существуют такие положительные постоянные* b_0 *и* b_1 *и такая функция* $\rho(n)$, *удовлетворяющая условию* (8), *что*

$$p_n(x) \leqslant b_0 e^{-b_1 x^2} \tag{13}$$

при $|x| \leqslant \Lambda(n)\rho(n)$ *и всех достаточно больших* n. *Тогда выполнено условие* (11) *для всех* j.

Для классов II и III справедливы соответствующие локальные предельные теоремы для плотностей, аналогичные интегральным теоремам.

5. Заметим, что (10) и (13) выполняются соответственно в области $0 \leqslant x \leqslant \Lambda(n)\rho(n)$ и $|x| \leqslant \Lambda(n)\rho(n)$ при достаточно медленно растущей функции $\rho(n)$, если соответственно имеют место соотношения (6), (7) и (12) в этих областях и если выражение $|\sqrt{n}|L_n|$ ограничено.

6. Результаты настоящей заметки являются продолжением исследований работ ([1–3]).

В заключение выражаю глубокую благодарность В. В. Петрову за ценные указания и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965. [2] В. В. Петров, Вестн. Ленинградск. унив., № 19, 49 (1963); № 1, 58 (1964). [3] В. Вольф, ДАН, 178, № 1, 21 (1968).