Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 517.43

МАТЕМАТИКА

И. И. ГОЛИЧЕВ

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 25 IX 1969)

В настоящей заметке даны теоремы, позволяющие свести вопрос о дискретности спектра некоторых несамосопряженных операторов к вопросу о дискретности спектра самосопряженных операторов.

1. Пусть D_0 — плотное в гильбертовом пространстве H линейное многообразие; L_1 и L_2 — симметричные на D_0 операторы. Пусть оператор $L_0' = L_1 + iL_2$ имеет замыкание L_0. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если хотя бы один из операторов L_1, L_2, $L_1 + L_2$, $L_1 - L_2$ полуограничен и его полуограниченное самосопряженное расширение имеет дискретный спектр, то ядро спектра оператора L_0 дискретно.*

Доказательство. Пусть, например, $(L_1y, y) \geqslant (y, y)$ при $y \in D_0$ и $\tilde{L}_1$ — полуограниченное самосопряженное расширение оператора L_1. Множество $\tilde{E}_1 = [y\colon (\tilde{L}_1y, y) \leqslant 1,\ y \in D(\tilde{L}_1)]$ компактно в H, так как $\tilde{L}_1$ имеет дискретный спектр. Тем более компактно множество $E_1 = [y\colon (L_1y, y) \geqslant 1,\ y \in D_0]$. Множество $E_0 = [y\colon |(L_0y, y)| \leqslant 1,\ y \in D_0] \in E_1$, и поэтому также компактно. Пусть L_0 имеет точку непрерывного спектра λ_0; тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется такая некомпактная последовательность $\{\varphi_i\}$, $\varphi_i \in D_0$, что $1/2 \leqslant \|\varphi_i\| \leqslant 2$ и

$$\|L_0\varphi_i - \lambda_0\varphi_i\| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Полагаем $\varepsilon = 1$. Из последнего неравенства имеем

$$\|L_0\varphi_i\| \leqslant |\lambda_0|\, \|\varphi_i\| + 1 \leqslant 2|\lambda_0| + 1. \tag{2}$$

Очевидно, последовательность $\{\varphi_i'\}$, где $\varphi_i' = \varphi_i / 2(2|\lambda_0| + 1)$, некомпактна вместе с последовательностью $\{\varphi_i\}$, но в силу неравенства (2) принадлежит E_0. Получили противоречие с компактностью множества E_0. Остальные случаи легко сводятся к доказанному.

Доказанная выше теорема обобщает теорему 4 гл. II работы [6].

Теорема 2. *Если*

$$(L_1y, y) \geqslant (y, y) \text{ при } y \in D_0; \quad (L_2y, y) \geqslant (y, y) \text{ при } y \in D_0, \tag{3}$$

оператор L_0 не имеет остаточного спектра, то оператор L_0 имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда множество $E_0 = [y\colon |(L_0y, y)| \leqslant 1,\ y \in D_0]$ компактно в H.

Доказательство достаточности. Пусть множество E_0 компактно; тогда компактно и множество $E = [y\colon |(L_0y, y)| \leqslant 1,\ y \in D(L_0)] \subset \tilde{E}_0$, где $\tilde{E}_0$ — замыкание множества E_0 в H. Множество $E' = [y\colon \|L_0y\| \leqslant 1,\ y \in D(L_0)] \subset E$ и, следовательно, также компактно в H; поэтому оператор L_0^{-1} вполне непрерывен, и, следовательно, спектр оператора L_0 дискретен (существование оператора L_0^{-1} следует из условий (3) и отсутствия остаточного спектра у оператора L_0).

Доказательство необходимости. Пусть спектр оператора L_0 дискретен; тогда обратный оператор $L_0^{-1} = A$ вполне непрерывен. Из условия (3) получаем, что $A = A_1 - iA_2$, где A_1 и A_2 — положительные самосопряженные вполне непрерывные операторы.

Допустим, что множество E_0 некомпактно; тогда найдется некомпактная последовательность $\{y_n\} \subset E_0$. Из (3) следует, что $\|y_n\| \leqslant 1$. Обозначим $L_0 y_n = \varphi_n$, тогда

$$(L_0 y_n, y_n) = (\varphi_n, A\varphi_n) = (A_1\varphi_n, \varphi_n) - i(A_2\varphi_n, \varphi_n). \tag{4}$$

Так как A_1 и A_2 — положительные самосопряженные вполне непрерывные операторы, то существуют ортогональные системы $\{e_i\}$ и $\{g_i\}$ такие, что

$$A_1\varphi_n = \sum_1^\infty \lambda_i(A_1)(\varphi_n, e_i)e_i, \quad A_2\varphi_n = \sum_1^\infty \lambda_i(A_2)(\varphi_n, g_i)g_i, \tag{5}$$

где $\lambda_i(A_1) > 0$, $\lambda_i(A_2) > 0$ и стремятся к нулю при $i \to \infty$. Докажем, что по любому $\nu > 0$ найдется n такое, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\left\|\sum_\nu^\infty \lambda_i(A_1)(\varphi_n, e_i)e_i\right\| \geqslant \varepsilon_0, \quad \left\|\sum_\nu^\infty \lambda_i(A_2)(\varphi_n, g_i)\right\| \geqslant \varepsilon_0, \tag{6}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ и не зависит ни от n, ни от ν.

Допустим, что утверждение не имеет места; тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется ν такое, что

$$\left\|\sum_\nu^\infty \lambda_i(A_1)(\varphi_n, e_i)e_i\right\| < \varepsilon, \quad \left\|\sum_\nu^\infty \lambda_i(A_2)(\varphi_n, g_i)g_i\right\| < \varepsilon \tag{7}$$

для всех n. Тогда

$$A\varphi_n = A_1\varphi_n - iA_2\varphi_n = \left[\sum_1^\nu \lambda_i(A_1)(\varphi_n, e_i)e_i - i\sum_1^\nu \lambda_i(A_2)(\varphi_n, g_i)g_i\right] + \\ + \left[\sum_\nu^\infty \lambda_i(A_1)(\varphi_n, e_i)e_i - i\sum_\nu^\infty \lambda_i(A_2)(\varphi_n, g_i)g_i\right] = g_n^\nu + \psi_n^\nu, \tag{8}$$

где

$$g_n^\nu = \sum_1^\nu \lambda_i(A_1)(\varphi_n, e_i)e_i - i\sum_1^\nu \lambda_i(A_2)(\varphi_n, g_i)g_i,$$

$$\psi_n^\nu = \sum_\nu^\infty \lambda_i(A_1)(\varphi_n, e_i)e_i - i\sum_1^\nu \lambda_i(A_2)(\varphi_n, g_i)g_i.$$

В силу неравенств (7) и равенства (8) $\|\psi_n{}^\nu\| \leqslant 2\varepsilon$, а $\|g_n{}^\nu\| \leqslant 1 + 2\varepsilon$. Множество $\{g_n{}^\nu\}$ принадлежит конечномерному пространству и ограничено, поэтому для него существует конечная ε-сеть $\{\eta_i\}$, а так как $\|\psi_n{}^\nu\| \leqslant$ $\leqslant 2\varepsilon$, то $\{\eta_i\}$ образует 3ε-сеть множества $\{y_n\} = \{A\varphi_n\}$. Но это противоречит некомпактности последовательности $\{y_n\}$. Пусть, например, выполнено первое из неравенств (6), тогда

$$1 \geqslant (A_1\varphi_n, \varphi_n) = \sum_1^\infty \lambda_i(A_1)|(\varphi_n, e_i)|^2 \geqslant \sum_\nu^\infty \lambda_i(A_1)|(\varphi_n, e_i)|^2 \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{\lambda_\nu(A_1)} \sum_\nu^\infty \lambda_i^2(A_1)|(\varphi_n, e_i)|^2 \geqslant \frac{1}{\lambda_\nu(A_1)}\varepsilon_0.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что $\lambda_\nu(A_1) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В условиях теоремы 2 имеют место неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2}}((L_1 + L_2)y, y) \leqslant |(L_0 y, y)| \leqslant ((L_1 + L_2)y, y), \tag{9}$$

когда $y \in D_0$; поэтому множество E_0 компактно тогда и только тогда, когда компактно множество $E_1 = [y\colon ((L_1 + L_2)y, y) \leqslant 1,\ y \in D_0]$. Отсюда легко получить, что справедливо утверждение: если выполняются условия теоремы 2 и замыкание оператора $L_1 + L_2$ — оператор $\overline{L_1 + L_2}$ имеет конечные индексы дефекта, то спектр оператора L_0 дискретен тогда и только тогда, когда оператор $\overline{L_1 + L_2}$ имеет самосопряженное расширение с дискретным спектром.

2. Пусть I — некоторый оператор сопряжения в гильбертовом пространстве H. Линейный оператор A с плотной в H областью определения $D(A)$ будем называть I-симметрическим, если для любых φ и ψ из $D(A)$ имеет место равенство $(A\varphi, I\psi) = (\varphi, IA\psi)$, эквивалентное соотношению $A \subset IA^*I$. Из последнего соотношения следует, что I-симметрический оператор допускает замыкание. Если $A = IA^*I$, то оператор A называется I-самосопряженным ([1]). В работе ([5]) показано, что I-симметрический оператор допускает I-самосопряженное расширение.

Комбинируя методы Р. С. Исмагилова ([3]) и Левинсона ([2]), легко доказать, что минимальный оператор L_0, порожденный дифференциальным выражением

$$l[u] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + gu \tag{10}$$

в $L_2(E_2)$, где a, b, g — комплекснозначные локально интегрируемые функции переменных x и y, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, I-самосопряжен, если

$$\iint\limits_{E_2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{|a|M}} = +\infty, \quad \iint\limits_{E_2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{|a|M}} = +\infty; \tag{11}$$

здесь $M(r)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ — положительная не убывающая на $(0, \infty)$ функция;

$$\frac{\sqrt{|a|}\,\partial M/\partial x}{\sqrt{M^3}} < +\infty, \quad \frac{\sqrt{|b|}\,\partial M/\partial y}{\sqrt{M^3}} < +\infty, \quad \operatorname{Re} g + \operatorname{Im} g \geqslant -kM(r). \tag{12}$$

В частности, если действительные и мнимые части a и b положительны, $\operatorname{Re} g \geqslant -c$, $\operatorname{Im} g \geqslant c$ и $\alpha \leqslant |a| \leqslant M$, $\alpha \leqslant |b| \leqslant M$, то оператор L_0 I-самосопряжен и поэтому не имеет остаточного спектра ([1]). Теперь, используя теорему 2, легко доказать, что оператор L_0 имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда минимальный оператор M_0, порожденный дифференциальным выражением

$$m[u] = -(\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2) + (\operatorname{Re} g + \operatorname{Im} g)u,$$

имеет дискретный спектр. Оператор M_0 имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда выполнено условие Молчанова ([4]). В одномерном случае оно имеет вид

$$\int\limits_x^{x+a} (\operatorname{Re} g + \operatorname{Im} g)\,dt \to \infty$$

при $x \to \infty$ и любом $a > 0$.

Используя теорему 1, легко доказать, что имеет место

Т е о р е м а 3. *Любое I-самосопряженное расширение минимального дифференциального оператора L_0, порожденного дифференциальным выра-*

жением

$$l[y] = -[(p_1(x) + ip_2(x))y']' + (g_1(x) + ig_2(x))y$$

в $L_2(0, \infty)$, *имеет дискретный спектр, если выполняется хотя бы одно из условий* I—VI:

I. a) $p_1(x) \geqslant \alpha > 0$;

b) $g_1(x) \to +\infty$ *при* $x \to \infty$.

II. a) $p_1(x) \geqslant \alpha > 0, \quad g_1(x) \geqslant -c$;

b) $\int\limits_x^{x+a} g_1(t)\,dt \to +\infty$ *при* $x \to \infty$ *и любом* $a > 0$.

III. a) $p_1(x) > 0, \quad g_1(x) \geqslant -c$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \int\limits_x^\infty \frac{dt}{p_1(t)} = 0$.

IV. a) $p_1(x) > 0, \quad \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{p_1(t)}} = c < \infty$;

b) $g_1(x) - {}^1/_{16}\,[p'(x)]^2/p_1(x) \geqslant \alpha > 0$.

V. a) $p_1(x) > 0, \quad \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{p_1(t)}} = \infty$;

b) $g_1(x) - {}^1/_{16}\,[p_1'(x)]^2/p_1(x) \to +\infty$ *при* $x \to \infty$.

VI. a) $p_1(x) > 0, \quad g_1(x) \geqslant -c$;

b) $g_1(x) + {}^1/_4\,[p''(x) - {}^1/_4\,[p'(x)]^2/p(x)] \to +\infty$ *при* $x \to \infty$.

Утверждение теоремы 3 имеет место, если условия I—VI накладывать либо на p_2, g_2, либо на $p_1 + p_2$, $g_1 + g_2$, либо на $p_1 - p_2$, $g_1 - g_2$.

Автор выражает глубокую благодарность М. А. Наймарку за руководство работой и Р. С. Исмагилову за обсуждение результатов.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963. [2] М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, М., 1954. [3] Р. С. Исмагилов, ДАН, 142, № 6, 1239 (1962). [4] А. М. Молчанов, Тр. Моск. матем. общ., 2, 169 (1953). [5] Н. А. Жихарь, Укр. матем. журн., 11, № 4, 352 (1959). [6] В. Б. Лидский, Тр. Моск. матем. общ., 8, 83 (1959).