Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 3

УДК 517.948.3.35 МАТЕМАТИКА

Н. В. АЗБЕЛЕВ, М. П. БЕРДНИКОВА, Л. Ф. РАХМАТУЛЛИНА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 III 1969)

Рассмотрим систему уравнений

$$x_i(t) = \int_a^b Q_i(t, s, x_1(h_1(s)), \ldots, x_1(h_{m_1}(s)), \ldots, x_n(h_{m_{n-1}+1}(s)), \ldots$$

$$\ldots, x_n(h_{m_n}(s)))\, ds + f_i(t), \tag{1}$$

$$x_i(\xi) = \varphi_i(\xi) \text{ при } \xi \overline{\in} [a, b], \quad i = 1, \ldots, n,$$

в следующих предположениях.

В области $t, s \in [a, b]$, $|u_j| < \infty$, $j = 1, \ldots, N$ $(N = m_n)$ функция $Q_i(t, s, u_1, \ldots, u_N)$ $(i = 1, \ldots, n)$ измерима по s при всех t, $u_1, \ldots, u_N$ и непрерывна по совокупности аргументов $u_1, \ldots, u_N$ при всех t и почти всех s. $\sup\limits_{|u_j| \leqslant \gamma,\ j=1,\ldots,N} |Q_i(t, s, u_1, \ldots, u_N)|$ при любом $\gamma > 0$ и всех t суммируем по s. Для любого $\gamma > 0$ и каждого t_0

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b \sup_{|u_j| \leqslant \gamma,\ j=1,\ldots,N} |Q_i(t_0, s, u_1, \ldots, u_N) - Q_i(t, s, u_1, \ldots, u_N)|\, ds = 0.$$

На $[a, b]$ функции $f_1, \ldots, f_n$ непрерывны, а $h_1, \ldots, h_N$ измеримы и ограничены. На множестве $[\alpha, a] \cup [b, \beta]$, где

$$\alpha = \min\{a, \inf_{s \in [a, b],\ j=1,\ldots,N} h_j(s)\}, \qquad \beta = \max\{b, \sup_{s \in [a, b],\ j=1,\ldots,N} h_j(s)\},$$

функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ограничены и могут иметь лишь конечное число точек разрыва.

Обозначим $D_j = \{s \in [a, b] \mid h_j(s) \in [a, b]\}$, $E_j = \{s \in [a, b] \mid h_j(s) \overline{\in} [a, b]\}$, $j = 1, \ldots, N$. На множестве n-мерных вектор-функций $y(t) = \{y_1(t; s, \xi_1, \ldots, \xi_k), \ldots, y_n(t; s, \xi_1, \ldots, \xi_k)\}$ аргумента $t \in [a, b]$ и параметров $s, \xi_1, \ldots, \xi_k$ определим оператор $T_h(y)$ следующим образом: $T_h(y) = y_h$, где $y_h = \{y_{h_1}, \ldots, y_{h_N}\}$ — N-мерная вектор-функция с компонентами

$$y_{h_j} = \begin{cases} y_i(h_j(t); s, \xi_1, \ldots, \xi_k) & \text{при } t \in D_j, \\ 0 & \text{при } t \in E_j, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, N,$$

индекс i определяется из неравенств

$$m_{i-1} + 1 \leqslant j \leqslant m_i \quad (m_0 = 0). \tag{2}$$

Через $\varphi^h = \{\varphi^{h_1}, \ldots, \varphi^{h_N}\}$ обозначим N-мерную вектор-функцию с компонентами

$$\varphi^{h_j}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in D_j, \\ \varphi_i(h_j(t)) & \text{при } t \in E_j, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, N,$$

индекс i определяется неравенствами (2).

Пользуясь введенными обозначениями, систему (1) будем записывать в виде

$$x(t)=\int_a^b Q(t,\ s,\ x_h(s)+\varphi^h(s))\,ds+f(t),$$

где $Q(t, s, u)=\{Q_1(t, s, u_1, \ldots, u_N), \ldots, Q_n(t, s, u_1, \ldots, u_N)\}$, $u=\{u_1, \ldots \ldots, u_N\}$, $f(t)=\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$.

1. Пусть $C_{n[a,b]}$ — пространство n-мерных вектор-функций $x(t)$ с непрерывными на $[a, b]$ компонентами $x_i(t)$ и нормой $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b],\ i=1,\ldots,n}|x_i(t)|$.

Теорема 1. *Оператор* $Q(x)=\int_a^b Q(t, s, x_h(s)+\varphi^h(s))\,ds$ *действует в* $C_{n[a,b]}$ *и вполне непрерывен.*

Решением системы (1) будем называть неподвижную точку в $C_{n[a,b]}$ оператора $Q(x)$. Некоторые следствия теоремы 1 о существовании и единственности решения уравнения $x=Q(x)+f$ приведены без доказательства в [1,2].

n-мерной системе (1) поставим в соответствие N-мерную систему

$$z(t)=\int_a^b Q_h(t,\ s,\ z(s))\,ds+F(t), \tag{3}$$

где $z(t)=\{z_1(t), \ldots, z_N(t)\}$, $F(t)=f_h(t)+\varphi^h(t)$. Эту систему рассматриваем на множестве N-мерных вектор-функций с измеримыми ограниченными компонентами.

Теорема 2. *Система* (1) *имеет решение* x *тогда и только тогда, когда существует решение* z *системы* (3). *Соотношения* $x(t)=\int_a^b Q(t, s, z(s))\,ds+f(t)$ *и* $z(t)=x_h(t)+\varphi^h(t)$ *устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством решений* x *системы* (1) *и множеством решений* z *системы* (3).

Приведенная теорема развивает идею известной подстановки А. И. Логунова [3] и позволяет сводить ряд проблем о системе (1) к уже изученным вопросам относительно системы (3) без отклоняющегося аргумента. Таким образом, утверждения об интегральных неравенствах и их следствия применительно к дифференциальным уравнениям [4-6] распространяются, в силу теоремы 2, на системы с отклоняющимся аргументом. Аналогичные распространения получают некоторые приближенные и качественные методы. Иначе говоря, утверждения о системе (3) приводят, в силу теоремы 2, к соответствующим утверждениям о системе (1).

2. В случае $Q_i(t,\ s,\ u_1, \ldots, u_N)=\lambda\sum\limits_{j=1}^{N} K_{ij}(t,\ s)\,u_j$ обозначим

$$K(t,\ s)=\begin{pmatrix} K_{11}(t,\ s)\ldots K_{1N}(t,\ s)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K_{n1}(t,\ s)\ldots K_{nN}(t,\ s)\end{pmatrix},\quad \Phi(t)=\int_a^b K(t,\ s)\,\varphi^h(s)\,ds.$$

Таким образом, в линейном случае система (1) имеет вид

$$x(t)=\lambda\int_a^b K(t,\ s)\,x_h(s)\,ds+f(t)+\lambda\Phi(t). \tag{4}$$

К такой системе применима теория Фредгольма — Рисса. Поэтому справедлива, например,

Теорема 3. *Если система* (4) *однозначно разрешима при какой-нибудь паре вектор-функций* $\varphi=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $f=\{f_1, \ldots, f_n\}$, *то она од-*

нозначно разрешима при любых φ и f. Если при какой-нибудь паре φ и f система (4) *не обладает свойством однозначной разрешимости, то она не будет однозначно разрешимой ни при каких φ и f.*

Через $P_h(t, s)$ обозначим $N \times N$-матрицу, каждый столбец которой является результатом применения оператора T_h к соответствующему столбцу $n \times N$-матрицы $P(t, s)$. Таким образом, в линейном случае система (3) имеет вид

$$z(t) = \lambda \int_a^b K_h(t, s) z(s) ds + F(t). \tag{5}$$

Из теоремы 2 следует совпадение характеристических чисел системы (4) и системы (5).

Ниже будем полагать, что $K_{ij}(t, s)$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, N;\ t, s \in \in [a, b])$ суммируема с квадратом по s при каждом t, причем функция

$K_{ij}(t, s)|^2 ds$ непрерывна на $[a, b]$.

Обозначим $R(t, s; \lambda) = K(t, s) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \Gamma(\tau, s; \lambda) d\tau$, где $\Gamma(t, s; \lambda)$ — резольвента ядра $K_h(t, s)$ системы (5). Тогда для решения $x(t)$ системы (4) имеем

$$x(t) = \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) [f_h(s) + \lambda \Phi_h(s)] ds + f(t) + \lambda \Phi(t) =$$

$$= \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) [f_h(s) + \varphi^h(s)] ds + f(t).$$

Резольвента $R(t, s; \lambda)$ вырожденного ядра $K(t, s)$ может быть построена на основе теоремы 2 в конечном виде. Для случая $n = 1$, $N = 1$ такая резольвента приведена в ([7]).

3. Система дифференциальных уравнений

$$x_i'(t) + \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(t) x_r(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} b_{ij}(t) x_k(h_j(t)) + f_i(t), \quad t \in [a, b],$$

$x_i(\xi) = \varphi_i(\xi)$ при $\xi \overline{\in} [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, имеет в принятых выше обозначениях вид

$$x'(t) + A(t) x(t) = B(t) [x_h(t) + \varphi^h(t)] + f(t), \tag{6}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) \ldots b_{1N}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}(t) \ldots b_{nN}(t) \end{pmatrix}.$$

Решением системы (6) будем называть вектор-функцию с абсолютно непрерывными компонентами, удовлетворяющую (6) почти всюду на $[a, b]$.

Предполагая f_i, a_{ir}, b_{ij} $(i, r = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, N)$ суммируемыми с квадратом на $[a, b]$, рассмотрим краевую задачу

$$x'(t) + A(t) x(t) = B(t) [x_h(t) + \varphi^h(t)] + f(t), \quad l[x] = c. \tag{7}$$

Пусть $l[x] = \{l_1[x], \ldots, l_n[x]\}$, где $l_1[x], \ldots, l_n[x]$ — такие линейные функционалы в $C_{n[a, b]}$, что задача $u' + Au = f$, $l[u] = 0$ имеет при любой f решение $u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds$, причем матрица $G(t, s)$ $(t, s \in [a, b])$ суммируема с квадратом по s при каждом t.

Теорема 4. *Задача* (7) *однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $x \equiv 0$ является единственным решением однородной задачи $x'(t) + A(t) x(t) = B(t) x_h(t)$, $l[x] = 0$.*

В случае однозначной разрешимости существует матрица Грина $\mathfrak{G}(t, s)$ задачи (7), то есть при любых f, φ и c решение $x(t)$ этой задачи имеет вид $x(t) = \int_a^b \mathfrak{G}(t, s)[f(s) + B(s)\varphi^h(s)]\,ds + d(t)$. Здесь $d(t)$ — решение задачи $u' + Au = 0$, $l[u] = c$.

Обозначив $R(t, s)$ резольвенту уравнения $x(t) = \int_a^b G(t, s)B(s)x_h(s)\,ds$, имеем: $\mathfrak{G}(t, s) = G(t, s) + \int_a^b R(t, \tau)G_h(\tau, s)\,d\tau$.

Следствие. *Пусть* $l[x] \equiv x(a)$, $h_j(t) \leqslant t$, $j = 1, \ldots, N$, $t \in [a, b]$. *Тогда задача* (7) *однозначно разрешима. Если на* $[a, b]$ $a_{ir} \geqslant 0$ $(i, r = 1, \ldots, n;\ i \neq r)$, $b_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, N)$, *то* $\mathfrak{G}(t, s) \geqslant 0$ *в квадрате* $t, s \in [a, b]$.

Отметим, что если при каком-нибудь $l[x]$ задача (7) однозначно разрешима, то существует n-мерная фундаментальная система решений $x^1, \ldots, x^n$ однородного уравнения $x'(t) + A(t)x(t) = B(t)x_h(t)$. Таким образом, любое решение $x(t)$ уравнения (6) имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) + \int_a^b \mathfrak{G}(t, s)[f(s) + B(s)\varphi^h(s)]\,ds.$$

4. Используя оценки спектрального радиуса интегрального уравнения, эквивалентного краевой задаче, можно получать условия разрешимости, выраженные через коэффициенты уравнения. Например, для скалярного уравнения

$$\begin{gathered} x^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} p_j(t)\, x^{(k-1)}(h_j(t)) = f(t), \quad t \in [a, b], \\ x^{(i)}(\xi) = \varphi_i(\xi) \text{ при } \xi \overline{\in} [a, b], \quad i = 0, 1, \ldots, r, \quad r \leqslant n - 1, \end{gathered} \tag{8}$$

справедлива

Теорема 5. *Пусть*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{(h_j(s) - a)^{n-k}(b - s)^{n-r-1}}{(n-k)!} \sigma_j(s)\,|p_j(s)|\,ds < (b - a)^{n-r-1},$$

где

$$\sigma_j(s) = \begin{cases} 1 & \textit{при } s \in D_j, \\ 0 & \textit{при } s \in E_j, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, m_{r+1}.$$

Тогда уравнение (8) *с краевыми условиями* $x^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, $x^{(r)}(b) = 0$ *имеет единственное решение. Если, кроме того,* $p_j(t) \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m_{r+1}$, $t \in [a, b]$, *то функция Грина задачи отрицательна при* $t, s \in [a, b]$.

Аналогичные критерии разрешимости уравнения (8) с другими краевыми условиями приведены в ([1, 2]).

Тамбовский институт химического машиностроения

Поступило 13 III 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. П. Бердникова, Тр. Тамбовск. инст. химич. машиностроения, в. 3, 65 (1969). [2] Н. В. Азбелев, М. П. Бердникова, Л. Ф. Рахматуллина, Тр. Тамбовск. инст. химич. машиностроения, в. 3, 71 (1969). [3] А. И. Логунов, ДАН, 150, № 2, 256 (1963). [4] Н. В. Азбелев, Тр. Тамбовск. инст. химич. машиностроения, в. 2, 8 (1968). [5] Г. Н. Жевлаков, Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков, Докл. АН БССР, 10, № 9, 626 (1966). [6] Л. Н. Фадеева, Дифференциальные уравнения, 5, № 2, 343 (1969). [7] Л. Ф. Рахматуллина, Тр. Тамбовск. инст. химич. машиностроения, в. 3, 69 (1969).