Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 2

УДК 519.212.1

МАТЕМАТИКА

В. П. МАСЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ И ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 26 VIII 1969)

1. Пусть $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — конечное множество с σ-алгеброй $\mathfrak{A}$ всех его подмножеств, на которой определена вероятность $P(A)$, $A \in \mathfrak{A}$. Элементы алгебры $\mathfrak{A}$ мы будем называть истинными событиями, а элементы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — элементарными истинными событиями. Пусть A_i само подразделено на k элементов $A_i = \{B_1^i, B_2^i, \ldots, B_k^i\}$, которые мы назовем элементарными виртуальными событиями. Их совокупность (при $i = 1, 2, \ldots, n$) назовем множеством элементарных событий, а элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}^i$ подмножеств A_i — виртуальными событиями.

Пусть $Z(B)$ — некоторая комплексная функция на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, порожденной множеством nk элементарных виртуальных событий, аддитивная на каждом из множеств A_i и такая, что

$$|Z(A)|^2 = P(A), \quad A \in \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}$ будем называть просто событиями, функцию $Z(B)$, $B \in \mathfrak{B}$,— амплитудой события B.

Определение 1. Условная амплитуда $Z(B_1 / B_2)$ события B_1 при наступлении события B_2 определяется как отношение

$$Z(B_1/B_2) = \frac{Z(B_1 \cdot B_2)}{Z(B_2)}.$$

2. Будем рассматривать конечную систему $\mathscr{K}$ состояний $a_1, \ldots, a_k$, которые сменяют друг друга через конечные промежутки времени $T_0, T_1, \ldots \ldots, T_N$. В качестве элементарных истинных событий A_{ij} мы возьмем всевозможные пары точек $\{(T_0, a_i), (T_N, a_j)\}$ * на плоскости T, a. Это событие подразделим на элементарные виртуальные события, являющиеся последовательностями N точек $\{(T_0, a_i), (T_1, a_{i_1}), \ldots, (T_{N-1}, a_{i_{N-1}}), (T_N, a_j)\}$, в которых начальная и конечная точки фиксированы. Иначе говоря, элементарными виртуальными событиями являются всевозможные «пути» системы $\mathscr{K}$ из точки (T_0, a_i) в точку (T_N, a_j). Множество всех путей, соединяющих все начальные и конечные точки, есть множество элементарных событий.

Определение 2. Пусть на σ-алгебре путей задана амплитуда $Z(B)$. Будем говорить, что она определяет комплексную марковскую цепь (*КМ*-цепь), если условная амплитуда того, что система в момент T_{i+1} находится в состоянии ** a_ν при условии, что в моменты $T_i, T_{i-1}, \ldots, T_0$ она находилась в состоянии $a_\mu, a_{\mu_1}, \ldots, a_{\mu_{i-1}}$ соответственно, равна условной амплитуде того, что система в момент T_{i+1} находится в состоянии a_ν при условии, что в момент T_i она находилась в состоянии

* Это связано с тем физическим фактом, что измерение мы можем производить только в начальный и конечный моменты.

** Событие (T_i, a_ν), состоящее в том, что система в момент T_i находится в состоянии a_ν, есть подмножество всех путей, проходящих через точку (T_i, a_ν). Истинное событие $A_{\mu\nu}$ равно пересечению события (T_0, a_μ) и события (T_N, a_ν).

a_μ. Эту амплитуду мы будем называть **амплитудой перехода** из a_μ в a_ν за один шаг и обозначать $z_{\mu\nu}^{i,\,i+1}$.

Определение 3. *КМ*-цепь называется **однородной**, если ее амплитуды переходов за один шаг не зависят от T_i и N.

Положим в однородной *КМ*-цепи $N = 1$. В этом случае виртуальных событий нет. Поэтому будем считать такую ситуацию чисто классической, и будем получать вероятности переходов $P_{\mu\nu}^{0,1} = |z_{\mu\nu}^{0,1}|^2$ из соображений классической теории вероятностей. Вероятность переходов для однородной *КМ*-цепи при $N = 1$ мы будем называть **классическими вероятностями перехода** *КМ*-цепи (при любом N).

Перейдем к непрерывным *КМ*-процессам. Пусть система $\mathscr{H}$ состоит из точек $x_\nu = \varepsilon\nu$, $|x_\nu| \leqslant l(\varepsilon)$, где $l(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, и пусть сверх того $T_{i+1} - T_i \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а $N \to \infty$ так, что $T_N \to t$. Соотношение (1) мы ослабим, положив

$$|Z(A)|^2 = P(A) + o(\varepsilon), \quad A \in \mathfrak{A}. \tag{2}$$

В этом случае (при сохранении прочих условий) мы будем говорить, что амплитуда $Z(B)$ **определяет однородную** ε-*КМ*-**цепь** (ср. ([1])).

Мы будем говорить, что однородная ε-*КМ*-цепь **определяет непрерывный** *КМ*-**процесс**, если существует функция $G(x, \xi, t)$ такая, что: 1) $|G(\mu\varepsilon, \nu\varepsilon, T_i) - \varepsilon^{-1}Z((T_i, x_\nu) \,/\, (T_0, x_\mu))| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерна по μ, ν, i; 2) свертки по второму аргументу первых производных $G(x, \xi, t)$ при $t = 0$ с функцией из класса S (основных функций) принадлежит S; 3) в тех точках x, в которых $G(x, \xi, t)$ меньше некоторой константы, она бесконечно дифференцируема. Функцию $G(x, \xi, t)$ будем называть **функцией Грина предельного** *КМ*-процесса.

Теперь рассмотрим нерелятивистские частицы в электромагнитном поле, выпускаемые из точки ξ с равновероятным распределением скоростей.

Скорость частицы, попавшей за время t в точку x_i, равна $v_i = (x_i - \xi) \,/\, t + O(1)$ при $t \to 0$. Вероятность попадания на отрезок $[x_1, x_2]$ пропорциональна, очевидно, $v_2 - v_1 = (x_2 - x_1) \,/\, t + O(1)$. Поэтому для ε-*КМ*-цепи, отвечающей движению нерелятивистской частицы в электромагнитном поле, согласно сказанному выше, должно выполняться соотношение

$$\sum_{j_1 \leqslant j \leqslant j_2} P_{ij}^{0,1} = (x_{j_2} - x_{j_1})/(T_1 - T_0) + O(1), \tag{3}$$

где $P_{ij}^{0,1}$ — классические вероятности переходов *КМ*-цепи, β — нормировочная константа.

Теорема 1. *Для того чтобы $G(x, \xi, t)$ была функцией Грина КМ-процесса, предельного для какой-либо ε-КМ-цепи, классические вероятности переходов которой удовлетворяют условию** (3), *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению* (*Шредингера*)

$$i\,\partial G \,/\, \partial t = \{[i\alpha\,\partial \,/\, \partial x + A(x)]^2 + V(x)\} G,$$

где $A(x)$, $V(x)$ — некоторые гладкие функции, α — постоянная.

Доказательство достаточности легко следует из асимптотики при $t \to 0$ функции Грина уравнения Шредингера. Наметим доказательства необходимости. Оно основывается на ряде лемм.

Лемма 1. *Условная амплитуда $Z(T_{i+j}, a_\nu) \,/\, (T_i, a_\mu))$ КМ-цепи равна матричному элементу $a_{\mu\nu}$ произведения матриц*

$$\operatorname{Mat} a_{\mu\nu} = \operatorname{Mat} z_{\mu\nu}^{i,\,i+1} \operatorname{Mat} z_{\mu\nu}^{i+1,\,i+2} \ldots \operatorname{Mat} z_{\mu\nu}^{i+j-1,\,i+j}.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для марковских цепей ([2]). Из нее следует

Лемма 2. *Оператор* $U_t\psi(x) = \int G(x, \xi, t)\,\psi(\xi)\,d\xi$, *где* $G(x, \xi, t)$ —

* То есть для нерелятивистской частицы в электромагнитном поле.

функция Грина предельного КМ-процесса, является унитарной однопараметрической группой.

Лемма 3. *Для функции Грина предельного КМ-процесса, удовлетворяющего условию теоремы, справедливо асимптотическое соотношение*

$$|G(x,\ \xi,\ t)|^2 = \text{const}/t + O(1) \tag{4}$$

при $t \to 0$.

Пусть $\hat{H}$ — производящий самосопряженный оператор группы U_t. Функция Грина $G(x, \xi, t)$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$i\,\partial G/\partial t = \hat{H}G, \quad G|_{t=0} = \delta(x-\xi). \tag{5}$$

Из соотношения (4) можно заключить, что $G(x, \xi, t)$ имеет особенность лишь при $t = 0$. Следовательно, приближенное решение задачи (5), полученное с точностью до гладких функций, совпадает с асимптотикой решения при $t \to 0$ (ср. ([3])). Оператор $\hat{H}$ можно представить как псевдодифференциальный

$$\hat{H}\psi(x) = i\lim_{t\to 0}\int(\partial G/\partial t)\,\psi(\xi)\,d\xi = \int H(p,\ x)\,\psi(\xi)\exp[ip(x-\xi)]\,d\xi, \quad \psi(x)\in S \tag{6}$$

с некоторым полным символом $H(p, x)$, который в силу свойства 2) для $G(x, \xi, t)$ оказывается достаточно гладким и растущим медленнее любой экспоненты.

Построение решения задачи (5), где $\hat{H}$ — псевдодифференциальный оператор, с точностью до гладких функций (при малых t) проводится методом работы ([5]). Оказывается, справедлива

Лемма 4. *Асимптотика при* $t \to 0$ *решения задачи* (5), *удовлетворяющего условию* (4), *имеет вид*

$$|\partial^2 S/\partial x\,\partial\xi|^{-1/2}\{e^{iS(x,\ \xi,\ t)} + O(t)\},$$

где $S(x, \xi, t)$ *удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби* $\partial S/\partial t + H(\partial S/\partial x, x) = 0$.

Отсюда и из (4) делается заключение, что $S(x, \xi, t) = \alpha(x-\xi)^2/t + O(1)$. Поэтому

$$\int G(x,\ \xi,\ t)\,(x-\xi)^3 F(\xi)\,d\xi = o(t) \tag{7}$$

для любой финитной $F(\xi)$.

Из равенства (6) следует, что существуют пределы *

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} t^{-1}\left[\int G(x,\ \xi,\ t)\,e(\xi)\,d\xi - e(x)\right] = V_N(x),\\ &\lim_{t\to 0} t^{-1}\int G(x,\ \xi,\ t)\,(x-\xi)\,e(\xi)\,d\xi = A_N(x),\\ &\lim_{t\to 0} t^{-1}\int G(x,\ \xi,\ t)\,(x-\xi)^2\,e(\xi)\,d\xi = 2B_N(x), \end{aligned} \tag{8}$$

где $e(\xi)$ — финитная функция, равная 1 при $\xi \in (-N, N)$.

Пусть $\psi_0(x)$ финитна, $\operatorname{supp}\psi_0 \in (-N, N)$. Поскольку

$$\psi_0(\xi) = \psi_0(x)\,e(\xi) + (x-\xi)\,\psi_0'(x)\,e(\xi) + {}^1/_2(x-\xi)^2\,\psi_0''(x)\,e(\xi) + (x-\xi)^3 F(x,\ \xi)\,e(\xi),$$

то, в силу (7) и (8),

$$\int G(x,\ \xi,\ t)\,\psi_0(\xi)\,d\xi - \psi_0(x) = t\,[V_N(x)\,\psi_0(x) + A_N(x)\,\psi_0'(x) + B_N(x)\,\psi_0''(x)] + o(t).$$

* Ср. вывод А. Н. Колмогорова уравнения для предельного марковского процесса.

Следовательно,

$$\hat{H}\psi_0 = B_N\psi_0'' + A_N\psi_0' + V_N\psi_0. \qquad (9)$$

Отсюда, вновь учитывая (4) и лемму 4, а затем производя процедуру замыкания ($N \to \infty$), приходим к утверждению теоремы, поскольку, в силу (9), при $N_1 < N_2$ и $x \in (-N_1, N_1)$ выполняются равенства $A_{N_1}(x) = A_N(x)$, $B_{N_1}(x) = B_N(x)$, $V_{N_1}(x) = V_N(x)$.

Обобщение на неоднородный (зависящий от времени) многомерный случай может быть произведено без существенных изменений.

В заключение автор приносит благодарность В. М. Алексееву за ценную дискуссию.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
23 VIII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Feynman, Rev. Mod. Phys., 20, № 2, 367 (1948). [2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, 1, М., 1958. [3] Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов, Теория вероятностей, «Наука», М., 1967. [4] L. Hörmander, Acta. Math., 121, 3:4, 221 (1968). [5] В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.