Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 3

УДК 517.514 *МАТЕМАТИКА*

А. И. ВАЙНДИНЕР

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ (КОНЕЧНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СУПЕРПОЗИЦИЕЙ ФУНКЦИЙ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ)

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 31 X 1969)

Проблема представления (точного или приближенного) непрерывных и дифференцируемых функций n переменных, определенных на единичном кубе $\overline{\Omega}^{(n)}$, в виде конечной суперпозиции функций меньшего числа переменных является весьма важной как в теоретическом плане, так и с точки зрения приложений к конструктивной теории функций, общей теории приближенных методов и другим задачам анализа. Наиболее полное теоретическое решение этот вопрос получил во второй половине 50-х годов в ряде работ школы А. Н. Колмогорова (см., например, обзор ([1])). Самый сильный результат здесь принадлежит А. Н. Колмогорову ([2]), согласно которому любая непрерывная в $\overline{\Omega}^{(n)}$ функция f точно представима $2n+1$ функциями одной переменной, причем аргументом каждой из этих функций является сумма n стандартных (т. е. не зависящих от f) функций также лишь одной переменной. Конечно, отсюда не следует, что для изучения свойств функций n переменных достаточно ограничиться изучением свойств функций лишь одной переменной (хотя полученная в ([2]) конструкция весьма удобна, именно, функция f линейно зависит от $2n+1$ функций, определяющих f), ибо, как отмечено в конце обзора ([1]), для практических целей подобные представления, по-видимому, бесполезны, так как используют существенно негладкие функции, вроде функции Вейерштраса *. Таким образом, представление f в виде конечной суперпозиции функций меньшего числа переменных, дифференциальные свойства которых не хуже дифференциальных свойств f, должно быть приближенным, и такие удобные для приложений представления естественно искать прежде всего с помощью набора достаточно гладких стандартных функций, обеспечивающих существование и единственность приближающей функции, форма которой, с одной стороны, линейно зависела бы от функций (или постоянных), определяющих f, а с другой стороны, обладала бы лучшими аппроксимативными свойствами в том или ином классе функций по сравнению с любой другой линейной формой, использующей тот же набор стандартных функций. Рассмотрению некоторых вопросов, связанных с этой проблемой, посвящена эта заметка.

Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — целые числа, $x_1, \ldots, x_n$ — декартова система координат; $c_{m_i}^{(i)}(x_i) \in C[0, 1]$ $(m_i = 1, \ldots, M_i)$ — заданный набор стандартных функций, линейно независимых при каждом фиксированном номере $i \leqslant n$. Пусть $\bar{a}_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — n-компонентное множество, $\bar{a}_n - a_k = \{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ — $(n-1)$-компонентное подмножество $\bar{a}_n$; $\bar{a}_{n,k}$ — произвольное подмножество $\bar{a}_n$ с k компонентами, и если в $\bar{a}_{n,k}$ и $\bar{b}_{n,k}$ вхо-

* См. также обзор ([3]), в котором приведены и более поздние результаты — в основном отрицательные — о возможности точного представления дифференцируемых (или аналитических) функций в виде конечной суперпозиции дифференцируемых (или аналитических) функций меньшего числа переменных.

дят компоненты $\bar{a}_n$ и $\bar{b}_n$ с одинаковыми номерами, то пишем $\overrightarrow{a_{n,k}}$ и $\overrightarrow{b_{n,k}}$.

Наиболее общей линейной формой полиномов на основе функций $c_{m_i}^{(i)}$, содержащей функции не более $n-1$ переменных, является, очевидно,

$$F_{\overline{M}_n}^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{m_i=1}^{M_i}\widetilde{F}_{m_i}^{(i)}(\bar{x}_n-x_i)\,c_{m_i}^{(i)}(x_i). \tag{1}$$

Определение 1. Полином (1) будем называть **обобщенным полиномом порядка $\overline{M}_n$ ранга $n-1$ относительно системы функций** $c_{m_i}^{(i)}(x_i)$. Обобщенный полином порядка $\overline{M}_n$ ранга $k-1$ образуется из обобщенного полинома порядка $\overline{M}_n$ ранга k (обозначение $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$) после замены в последнем каждой функции k переменных $\overrightarrow{x_{n,k}}$ обобщенным полиномом порядка $\overrightarrow{\overline{M}_{n,k}}$ ранга $k-1$.

Полином $F_{\overline{M}_n}^{(1)}$ можно интерпретировать как естественное обобщение формы

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i), \tag{2}$$

в которой все функции определяются по f и которая является простейшим обобщенным полиномом порядка $\overline{M}_n=\{1,\ldots,1\}$ ранга 1. Полином вида (2) рассматривался А. Н. Колмогоровым (см. ([1, 4])), а также в ([4–6]); полиномы $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$ по степенной системе функций — в ([7, 8]), частная сумма ряда Фурье — в ([9, 10]). Отметим, что полином $F_{\overline{M}_n}^{(n-1)}$ обобщает также частные суммы, использованные в ([11]) для приближения класса функций с ограниченной смешанной производной и в ([12]) для приближения класса функций С. М. Никольского ([13]).

1. Если $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ — полином наилучшего равномерного приближения (н.р.п.) функции $f(\bar{x}_n)\in C(\overline{\Omega}^{(n)})$, то для него имеют место теоремы, аналогичные теоремам для полиномов н.р.п. функций одной переменной и полиномов вида (2) н.р.п. функций n переменных.

Теорема 1. *Если для каждого $i\leqslant n$ модули непрерывности функций $c_{m_i}^{(i)}(x_i)$ не хуже i-го частного модуля непрерывности функции $f(\bar{x}_n)\in C(\overline{\Omega}^{(n)})$, то для $f(\bar{x}_n)$ существует обобщенный полином $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$ н.р.п., причем функции k переменных $\overrightarrow{x_{n,k}}$, образующие этот полином, имеют частные модули непрерывности по переменной $x_i\in\overrightarrow{x_{n,k}}$ не хуже i-го частного модуля непрерывности функции $f(\bar{x}_n)$.*

Теорема 2 (аналог теоремы А. Н. Колмогорова ([14])). *Для того чтобы обобщенный полином $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$ был полиномом н.р.п. для функции $f(\bar{x}_n)\in C(\overline{\Omega}^{(n)})$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого обобщенного полинома $G_{\overline{M}_n^*}^{(k)}\in C(\overline{\Omega}^{(n)})$, где соответственные компоненты множеств $\overline{M}_n^*$ и $\overline{M}_n$ удовлетворяют условию $M_i^*\leqslant M_i$, имело место неравенство $\max\limits_S\{G_{\overline{M}_n^*}^{(k)}(f-F_{\overline{M}_n}^{(k)})\}\geqslant 0$, где $S\subset\overline{\Omega}^{(n)}$ — множество всех тех точек $\overline{\Omega}^{(n)}$, в которых $|f-F_{\overline{M}_n}^{(k)}|=\max\limits_{\overline{\Omega}^{(n)}}|f-F_{\overline{M}_n}^{(k)}|$.*

2. Здесь мы рассмотрим н.р.п. обобщенными полиномами $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$ класса функций, представимых интегральными операторами, для которого основная теорема конструктивной теории может быть сформулирована в терминах н.р.п. функций одной переменной.

Пусть $\rho_1(x, t_1), \ldots, \rho_n(x_n, t_n)$ — непрерывные в $\overline{\Omega^{(2)}}$ функции; Φ_s — множества суммируемых в $\overline{\Omega}^{(s)}$ функций $\varphi_s \in \Phi_s$ s переменных, удовлетворяющих там условию $|\varphi_s| \leqslant 1$. Через D_{ρ_i}, $D_{\vec{\rho}_{n,k}}$ обозначим классы непрерывных функций, представимых соответственно в виде интегралов

$$\int_0^1 \rho_i(x_i, t_i)\varphi_1(t_i)\,dt_i; \quad \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{k \text{ раз}} \prod \vec{\rho}_{n,k}\varphi_k(\vec{t}_{n,k}) \prod \vec{d}t_{n,k},$$

где произведения во втором интеграле распространяются на все k компонентов, входящих в $\vec{\rho}_{n,k}$ и $\vec{dt}_{n,k}$.

Теорема 3. *Пусть для каждого* $i \leqslant n$ $\quad c_{m_i}^{(i)}(x_i) \in D_{\rho_i}$ *и* $P_{M_i}^{(i)}(x_i)$ — *полином порядка не выше* M_i *относительно этой системы. Пусть далее заданы числа* $B_{M_i}^{(i)} \leqslant B < \infty$ *и последовательность неравенств*

$$\sup_{f_i \in D_\rho} \inf_{P_{M_i}^{(i)}} \max_{x_i \in [0,1]} |f_i - P_{M_i}^{(i)}| \leqslant B_{M_i}^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

причем для любой $f_i(x_i) \in D_{\rho_i}$ *найдется полином* $P_{M_i}^{(i)}$ *такой, что*

$$|f_i - P_{M_i}^{(i)}| \leqslant B_{M_i}^{(i)} b_i(x_i), \tag{4}$$

где $b_i(x_i) \in C[0, 1]$ *не зависит от* $f_i(x_i)$; $0 \leqslant b_i(x_i) \leqslant 1$.

Тогда для н. р. п. класса функций $D_{\bar{\rho}_n}$ *обобщенными полиномами* $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{f \in D_{\bar{\rho}_n}} \inf_{F_{\overline{M}_n}^{(k)}} \max_{\bar{x}_n \in \overline{\Omega}^{(n)}} |f - F_{\overline{M}_n}^{(k)}| \leqslant c \sum \prod \overline{E}_{n,k+1} \tag{3'}$$

и для любой $f(\bar{x}_n) \in D_{\bar{\rho}_n}$ *найдется полином* $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$ *такой, что*

$$|f - F_{\overline{M}_n}^{(k)}| \leqslant c \sum \prod \overline{H}_{n,k+1}, \tag{4'}$$

причем (3′) *следует из* (3); (4′) — *из* (4). *Постоянная* c, *которую при* $k = n - 1$ *можно принять равной* 1, *не зависит от* $\overline{M}_n$ *и* $\bar{x}_n$. *Далее, обозначено* $\overline{E}_n = \{B_{M_1}^{(1)}, \ldots, B_{M_n}^{(n)}\}$, $\overline{H}_n = \{B_{M_1}^{(1)} b_1(x_1), \ldots, B_{M_n}^{(n)} b_n(x_n)\}$, *а через* $\sum\prod \bar{r}_{n,k+1}$ — *сумма всех различных произведений* $k + 1$ *компонентов* n-*компонентного множества* $\bar{r}_n = \{r_1, \ldots, r_n\}$. *Функции* k *переменных* $\vec{x}_{n,k}$, *образующие полином* $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$, *удовлетворяющий неравенству* (4′), *принадлежат классам функций* $D_{\vec{\rho}_{n,k}}$.

Замечание 1. Если $B_{M_i}^{(i)}$ — величины одного порядка при любом $i \leqslant n$, причем $\lim_{M_i \to \infty} B_{M_i}^{(i)} = 0$, то обобщенный полином $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$ н. р. п. обладает на всем классе $D_{\bar{\rho}_n}$ лучшими (в отношении порядка верхней грани) аппроксимативными свойствами, нежели любой линейный полином относительно системы $c_{m_i}^{(i)}(x_i)$, содержащий произвольные функции k переменных, если число этих функций не превосходит числа всех различных функций k переменных, входящих в полином $F_{\overline{M}_n}^{(k)}$.

Замечание 2. Утверждения теоремы 3 и замечания 1, сформулированные в терминах наилучшего приближения в $L_r(\overline{\Omega}^{(n)})$ $(r \geqslant 1)$, остаются справедливыми, если под Φ_s и $D_{\bar{\rho}_{n,k}}$ подразумевать соответственно множества L_r суммируемых функций с $\|\varphi_s\|_{L_r} \leqslant 1$.

3. Если функции k переменных, образующие полином $F^{(k)}_{\overline{M}_n}$ *, определять из условия интерполирования непрерывной функции $f(\bar{x}_n)$ на подмножестве куба $\overline{\Omega}^{(n)}$ специального вида, то для $F^{(k)}_{\overline{M}_n}$ справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1, 3.

Определение 2. Интерполяционным решетом (или решетом) порядка $\overline{M}_n$ ранга $n-1$ назовем совокупность $\Gamma^{(n-1)}_{\overline{M}_n} \subset \overline{\Omega}^{(n)}$ гиперплоскостей $x_p = \mathrm{const}$, которая для каждого номера $i \leqslant n$ содержит M_i различных гиперплоскостей, параллельных гиперплоскости $x_i = 0$. Решето $\Gamma^{(k-1)}_{\overline{M}_n}$ образуется из решета $\Gamma^{(k)}_{\overline{M}_n}$ удалением из $\Gamma^{(k)}_{\overline{M}_n}$ всех точек, которые не принадлежат сразу двум гиперплоскостям размерности k решета $\Gamma^{(k)}_{\overline{M}_n}$.

Теорема 4. *Если для каждого $i \leqslant n$ модули непрерывности системы функций $c^{(i)}_{m_i}(x_i)$ не хуже i-го частного модуля непрерывности функции $f(\bar{x}_n) \in C(\overline{\Omega}^{(n)})$, то существует единственный обобщенный полином $F^{(k)}_{\overline{M}_n}$ относительно этой системы, интерполирующий $f(\bar{x}_n)$ на решете $\Gamma^{(k)}_{\overline{M}_n}$, причем функции k переменных $\vec{x}_{n,k}$, образующие этот полином, имеют частные модули непрерывности по переменной $x_i \in \vec{x}_{n,k}$ не хуже i-го частного модуля непрерывности функции $f(\bar{x}_n)$.*

Теорема 5. *Утверждения теоремы 3 и замечания 1 справедливы и в том случае, если в них вместо нижней грани по $P^{(i)}_{M_i}$ и $F^{(k)}_{\overline{M}_n}$ подразумевать соответственно интерполяционные полиномы функций $f_i(x_i)$ и $f(\bar{x}_n)$ на решете $\Gamma^{(0)}_{\overline{M}_1}$ (с $\overline{M}_1 = \{M_i\}$) и решете $\Gamma^{(k)}_{\overline{M}_n}$.*

4. Обобщенные полиномы $F^{(k)}_{\overline{M}_n}$ удобны для построения кубатурных формул. Заменяя функцию $f(\bar{x}_n)$ каким-либо обобщенным полиномом (наилучшего приближения, интерполяционным, частной суммой ряда Фурье и т. п.), мы сводим задачу вычисления кубатуры в n-мерной области к вычислению конечного числа кубатур в областях размерности не выше k $(k < n)$. С другой стороны, для погрешности такой кубатурной формулы справедливо замечание типа замечания 1.

5. Полиномы $F^{(k)}_{\overline{M}_n}$ могут быть использованы для построения прямых методов решения уравнений математической физики ([15]). При этом, например, для случая, когда искомое решение принадлежит классу функций $D_{\bar{\rho}_n}$, а приближенное решение $F^{(k)}_{\overline{M}_n}$ ищется из условия интерполирования уравнения на решете $\Gamma^{(k)}_{\overline{M}_n}$ (такой метод естественно называть методом решеточной коллокации), для оценки погрешности также может быть сформулировано замечание типа замечания 1 (см. также ([15]), замечание 1).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Арнольд, Матем. просвещение, № 3 (1958). [2] А. Н. Колмогоров, ДАН, 114, № 5 (1957). [3] А. Г. Витушкин. Тр. Международн. конгр. математиков, 1966, М., 1968. [4] Ю. П. Офман, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 2 (1961). [5] В. П. Моторный, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 6 (1963). [6] М.-Б. А. Бабаев, Сборн. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Баку, 1965. [7] Ю. А. Брудный. УМН, 20, в. 5 (1965). [8] Ю. А. Брудный. Матем. сборн., 73, № 1 (1967). [9] А. И. Вайндинер, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 7, № 1 (1967). [10] А. И. Вайндинер, ДАН, 184, № 3 (1969). [11] К. И. Бабенко, ДАН, 132, № 5, (1960). [12] Я. С. Бугров, Матем. сборн., 64, № 3 (1964). [13] С. М. Никольский, Сибирск. матем. журн., 43, № 6 (1963). [14] А. Н. Колмогоров, УМН, 3, в. 1 (1948). [15] А. И. Вайндинер, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 4 (1968).

* Здесь система функций $c^{(i)}_{m_i}(x_i)$ полагается чебышевской системой на интервале [0, 1] для каждого номера $i \leqslant n$.