Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. ТОПОНОГОВ

ТЕОРЕМЫ О КРАТЧАЙШИХ В НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 18 VIII 1969)

В работах А. В. Погорелова и В. Клингенберга для односвязных компактных римановых пространств V^m доказана теорема:

Если в римановом пространстве V^m риманова кривизна K в каждой точке и в каждом двумерном направлении не превосходит $k_1 > 0$ и положительна при $m = 2p$ (не меньше чем $k_1 / 4$ при $m = 2p + 1$), то любая дуга геодезической линии длины не больше чем $\pi / \sqrt{k_1}$ есть кратчайшая в V^m ([2–4]).

Для некомпактных римановых пространств аналогичная теорема была получена только для пространств с полюсом ([5]).

В этой работе рассматриваются произвольные полные некомпактные римановы пространства.

Обозначим через $R^m(R_0{}^m)$ полное m-мерное дважды непрерывно дифференцируемое риманово пространство, кривизна которого в каждой точке и в каждом двумерном направлении положительна (неотрицательна).

Теорема 1. *Если риманова кривизна R^m в каждой точке и в каждом двумерном направлении не превосходит числа $k_1 > 0$, то любая дуга геодезической линии, длина которой не превосходит $\pi / \sqrt{k_1}$, есть кратчайшая в R^m.*

Теорема 2. *Если риманова кривизна $R_0{}^m$ в каждой точке и в каждом двумерном направлении не превосходит некоторого числа $k_1 > 0$, то существует некоторое число $\rho > 0$ такое, что любая дуга геодезической линии длины не больше ρ есть кратчайшая в $R_0{}^m$.*

В теореме 2 число ρ не может быть оценено через k_1, как это следует из примера В. Клингенберга (([1]), стр. 230).

Доказательство теорем 1 и 2 существенно опирается на основные леммы 1 и 1^0.

1. Назовем лучом $p(A)$ в пространстве $R^m(R_0{}^m)$ с началом в точке A полугеодезическую, исходящую из A, каждая дуга которой есть кратчайшая в R^m $(R_0{}^m)$.

Поскольку $R^m(R_0{}^m)$ есть полное и некомпактное пространство, то через каждую точку $R^m(R_0{}^m)$ проходит по крайней мере один луч. Расстояние между точками A и B будем обозначать через AB.

Если ABC есть треугольник в $R^m(R_0{}^m)$, составленный из кратчайших, то через $A'B'C'$ будем обозначать треугольник на эвклидовой плоскости, у которого стороны равны соответствующим сторонам треугольника ABC.

Пусть AB — кратчайшая, $p_1(A)$ — луч с началом в точке A, а $p_2(B)$ — луч с началом в точке B в R^m. Обозначим через α угол между $p_1(A)$ и кратчайшей AB, а через β — угол между $p_2(B)$ и кратчайшей BA.

Лемма 1. *Если на луче $p_1(A)$ в пространстве R^m существует последовательность точек Q_n такая, что кратчайшие BQ_n сходятся к $p_2(B)$, и если ни один из лучей $p_1(A)$ и $p_2(B)$ не является частью другого, то $\alpha + \beta > \pi$.*

Доказательство. Обозначим через β_n угол в треугольнике ABQ_n при вершине B, а через α_n' и β_n' — углы треугольника $A'B'Q_n'$ при вершинах A' и B'. Выберем n_0 настолько большим, чтобы треугольник ABQ_n был бы невырожденным треугольником. Возьмем шар T с центром в точке A и радиуса $r = 2(AQ_{n_0} + AB + BQ_{n_0})$. Обозначим через k_0 минимум римановой кривизны по всем точкам шара T и по всем двумерным направлениям. Применим к треугольнику ABQ_{n_0} теоремы 1 и 6 ([6]); из них следует, что, во-первых, периметр треугольника не превосходит $2\pi / \sqrt{k_0}$, а во-вторых, угол α в треугольнике $AQ_{n_0}B$ не меньше чем угол α_{n_0}'' в треугольнике $A''Q_{n_0}''B''$, построенном на двумерной сфере радиуса $1/\sqrt{k_0}$ с такими же длинами сторон, что и у треугольника $AQ_{n_0}B$, при вершине A''. Сравнивая теперь угол α_{n_0}'' треугольника $A''Q_{n_0}''B''$ с углом α_n' треугольника $A'B'Q_{n_0}'$, мы получаем

$$\alpha \geqslant \alpha_{n_0}' + \delta, \tag{1}$$

где δ — некоторое положительное число, которое можно оценить снизу через k_0 и длины сторон треугольника ABQ_{n_0}. В силу теоремы 5 работы ([6])

$$\alpha_n' \leqslant \alpha_{n_0}' \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{2}$$

Кроме того, по теореме 6 ([6])

$$\beta_n \geqslant \beta_n'. \tag{3}$$

Наконец,

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n' + \beta_n') = \pi. \tag{4}$$

Из (1), (2), (3) и (4) следует

$$\alpha + \beta = \alpha + \lim_{n\to\infty} \beta_n \geqslant \lim_{n\to\infty} (\alpha_n' + \beta_n') + \delta = \pi + \delta > \pi,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1⁰. *Если на луче $p_1(A)$ пространства $R_0{}^m$ существует последовательность точек Q_n такая, что кратчайшие BQ_n сходятся к $p_2(B)$, то $\alpha + \beta \geqslant \pi$.*

Доказательство леммы 1⁰ опирается на те же теоремы 1 и 5 работы ([6]) и значительно проще, чем доказательство леммы 1.

Из леммы 1 выводится лемма 2.

Лемма 2. *В R^m не существует замкнутой геодезической линии.*

2. Доказательство теорем 1 и 2. Предположим, что теоремы 1 и 2 не верны. Тогда существует невырожденный двуугольник γ периметра меньше чем $2\pi / \sqrt{k_1}$. Пусть A — одна из вершин γ. Обозначим через $\gamma(A)$ двуугольник наименьшей длины по сравнению со всеми невырожденными двуугольниками с вершиной в точке A. Обычными приемами вариационного исчисления (см., например, ([4]) или ([7])) можно показать, что $\gamma(A)$ есть геодезическая петля с вершиной в точке A. Пусть $T(R)$ — замкнутый шар с центром в точке A и радиуса R. Обозначим через $\gamma(R)$ ($\gamma_0(R)$) геодезическую петлю в R^m ($R_0{}^m$) наименьшей длины по сравнению со всеми геодезическими петлями, вершины которых лежат в $T(R)$, через $Q(R)$ ($Q_0(R)$) — вершину $\gamma(R)$ ($\gamma_0(R)$), а через $f(R)$ ($f_0(R)$) — длину $\gamma(R)$ ($\gamma_0(R)$).

В силу леммы 2, функция $f(R)$ строго монотонна, а функция $f_0(R)$ стремится к нулю при $R \to \infty$ в силу предположения, что теорема 2 неверна.

В обоих случаях можно выбрать последовательность чисел $R_n \to \infty$ такую, что: 1) кратчайшие $AQ(R_n)$ ($AQ_0(R_n)$) сходятся к некоторому лучу $p(A)$ ($p_0(A)$); 2) нижние левые производные числа функции $f(R)$ ($f_0(R)$) в точках R_n будут строго отрицательны.

Выберем теперь n_0 настолько большим, чтобы угол α между $p(A)$ $(p_0(A))$ и $AQ(R_n)$ $(AQ_0(R_n))$ был меньше $\pi/4$:

$$\alpha < \pi/4. \tag{5}$$

Разобьем геодезическую $\gamma(R_n)$ $(\gamma(R_n))$ точками $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1} = Q(R_{n_0})$ так, чтобы любой отрезок A_iA_{i+1} $(i = 1, \ldots, k)$ петли $\gamma(R_n)$ $(\gamma_0(R_n))$ был кратчайшей в R^m $(R_0{}^m)$. На луче $p(A)$ выберем последовательность точек P_m такую, чтобы при любом i кратчайшие A_iP_m при $m \to \infty$ сходились к некоторым лучам $p_i(A_i)$ $(p_i{}^0(A_i))$. Продолжим лучи $p_i(A_i)$ $(p_i{}^0(A_i))$ геодезическими σ_i $(\sigma_i{}^0)$ в направлениях, противоположных направлениям лучей p_i и $p_i{}^0$. На каждой геодезической σ_i $(\sigma_i{}^0)$ отложим от точек A_i отрезки длиной δ, на концах $B_i(\delta)$ этих отрезков как на вершинах построим полигон $\bar{\gamma}(\delta)$ $(\bar{\gamma}_0(\delta))$, периметр которого обозначим через $p(\delta)$ $(p_0(\delta))$.

В силу леммы 1 (леммы 1^0), при δ достаточно малых

$$p(\delta) < f(R_{n_0}) \quad (p_0(\delta) = f_0(R_n) + o(\delta)).$$

Далее обычными методами вариационного исчисления можно показать существование геодезической петли $\bar{\gamma}(\delta)$ $(\bar{\gamma}_0(\delta))$ с вершиной в точке $B_1(\delta)$, длина которой не превосходит $p(\delta)$ $(p_0(\delta))$.

С другой стороны, из теоремы 6 работы [6] и (5) следует, что угол между кратчайшей $Q(R_{n_0})A$ и σ_1 $(Q_0(R_{n_0})$ и $\sigma_1{}^0)$ меньше $\pi/4$, а следовательно, при δ достаточно малом $A_1B_1(\delta) < AA_1$. Значит, $f(R) < f(R_{n_0})$ $(f_0(R) \leqslant f_0(R_{n_0}) + o(\delta))$ при $R_{n_0} - \delta \leqslant R < R_{n_0}$, откуда, в свою очередь, следует, что левое нижнее производное число для функции $f(R)$ $(f_0(R))$ в точке R_{n_0} не меньше нуля, вопреки выбору числа n_0.

Тем самым теоремы 1 и 2 доказаны.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
29 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, Riemansche Geometrie im Grossen, Berlin, 1968. [2] W. Klingenberg, Ann. Math., 69, 654 (1959). [3] W. Klingenberg, Comm. Math., Helv., 35, 47 (1961). [4] И. А. Погорелов, Матем. сборн., 18 (60), 181 (1946). [5] И. А. Соколенко, ДАН, 134, № 5 (1960). [6] В. А. Топоногов, УМН, 14, в. 1 (85) (1959). [7] В. А. Топоногов, Сибирск. матем. журн., 8, № 5 (1967).