Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 2

УДК 518.517.944/947 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ, А. В. ГУЛИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПО ПРАВЫМ ЧАСТЯМ

В работах ([1, 2]) получены необходимые и достаточные условия устойчивости по начальным данным двухслойных разностных схем, определяемых как операторно-разностные уравнения на семействе гильбертовых пространств $\{H_h\}$.

В настоящей работе построены оценки некоторых энергетических норм решений двухслойных разностных схем через начальные данные $y_0 \in H_h$ и правую часть $\varphi(t) \in H_h$, совпадающие при $\varphi = 0$ с оценками работ ([1, 2]).

Для изучения устойчивости по правой части применяется метод выделения стационарных неоднородностей (см. ([3, 4])), что позволяет освободиться от некоторых ограничений (таких, например, как малость шага по времени τ) работы ([5]), где устойчивость исследовалась методом энергетических неравенств. Кроме того, оказалось возможным рассмотреть случай несамосопряженных операторов и установить ряд новых оценок. Отметим, что все полученные оценки имеют место при тех же условиях на операторы разностной схемы, которые обеспечивают устойчивость по начальным данным.

1. Пусть $\{H_h\}$ — семейство гильбертовых пространств (вещественных или комплексных), зависящее от параметра h (H_h является аналогом пространства сеточных функций), $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots\}$ — сетка с шагом $\tau > 0$ и A, B: $H_h \to H_h$ — линейные (аддитивные и однородные) операторы, действующие в H_h и зависящие от h, τ и $t = t_n$.

Двухслойная разностная схема определяется как операторное уравнение (см. ([5]))

$$B(t_n)y_t + A(t_n)y = \varphi(t_n),\ n = 0, 1, \ldots; \quad y_0 \in H_h, \tag{1}$$

где $y = y_n = y_{h,\tau}(t_n) \in H_h$, $y_t = (y_{n+1} - y_n)/\tau$, $\varphi(t) \in H_h$.

Оператор A: $H \to H$ называется положительным ($A > 0$), если $(Ax, x) > 0$ для всех $0 \neq x \in H$, неотрицательным ($A \geqslant 0$), если $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. Если A — самосопряженный и положительный оператор, то можно ввести энергетическую норму $\| y \|_A = \sqrt{(Ay, y)}$.

Следующие леммы потребуются для доказательства теорем об устойчивости.

Лемма 1 (см. ([1, 2])). *Неравенство*

$$\|S\| \leqslant \rho, \quad S = E - \tau C, \tag{2}$$

следует из условия

$$B_0 \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} A, \quad B_0 = \operatorname{Re} B = \frac{B + B^*}{2}, \tag{3}$$

если $\rho \geqslant 1$, $A^* = A > 0$, $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$, *и из условия*

$$(A^{-1})_0 \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} B^{-1}, \quad (A^{-1})_0 = \operatorname{Re} A^{-1}, \tag{4}$$

если $\rho \geqslant 1$, $B^* = B > 0$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$.

Замечание. В случае действительного пространства H_h неравенства (3) и (4) эквивалентны соответственно условиям

$$B \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} A; \quad A^{-1} \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} B^{-1}.$$

Будем говорить (см. [5]), что самосопряженный оператор $\mathscr{D} = \mathscr{D}(t)$ удовлетворяет условию Липшица по t, если существует постоянная $c_1 \geqslant 0$, не зависящая от τ, h, n, такая, что при любых t и τ справедливы операторные неравенства

$$(1 - c_1\tau)\mathscr{D}(t-\tau) \leqslant \mathscr{D}(t) \leqslant (1 + c_1\tau)\mathscr{D}(t-\tau). \tag{5}$$

Лемма 2. *Если $\mathscr{D}(t)$ — самосопряженный положительный оператор, то условие Липшица* (5) *эквивалентно оценке*

$$\|\mathscr{D}^{1/2}(t)\,(\mathscr{D}^{-1}(t) - \mathscr{D}^{-1}(t-\tau))\,\mathscr{D}^{1/2}(t)\| \leqslant c_1\tau. \tag{6}$$

Доказательство. Переходя в (5) к обратным операторам, получим

$$-c_1\tau\mathscr{D}^{-1} \leqslant \mathscr{D}^{-1} - \check{\mathscr{D}}^{-1} \leqslant c_1\tau\mathscr{D}^{-1},$$

где $\mathscr{D} = \mathscr{D}(t)$, $\check{\mathscr{D}} = \mathscr{D}(t-\tau)$. Отсюда следует неравенство

$$-c_1\tau E \leqslant \mathscr{D}^{1/2}(\mathscr{D}^{-1} - \check{\mathscr{D}}^{-1})\mathscr{D}^{1/2} \leqslant c_1\tau E,$$

эквивалентное (6).

2. Теорема 1. *Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условию Липшица и $A^*(t) = A(t) > 0$. Тогда, если выполнено условие устойчивости* (3) *с константой $\rho = e^{c_0\tau}$, $c_0 \geqslant 0$, то для решения задачи* (1) *справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leqslant \tilde{\rho}^{\,n+1}\|y_0\|_{A(0)} + \sum_{n'=0}^{n} \tau\tilde{\rho}^{\,n-n'}\|B^{-1}\varphi_{n'}\|_{A(t_{n'})}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

где $\tilde{\rho} = e^{\tilde{c}_0\tau}$, $\tilde{c}_0 = c_0 + c_1/2$.

Доказательство. Представим уравнение (1) в виде эквивалентной явной схемы (см. [1])

$$x_{n+1} = S\bar{x}_n + \tau A^{1/2}B^{-1}\varphi_n, \tag{8}$$

где $x_{n+1} = A^{1/2}(t_n)y_{n+1}$, $\bar{x}_n = A^{1/2}(t_n)y_n$, $S = E - \tau C$, $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$. Из условия устойчивости (3), согласно лемме 1, следует оценка (2) нормы оператора перехода S, а из условия Липшица — очевидная оценка

$$\|\bar{x}_n\| \leqslant \sqrt{1 + c_1\tau}\,\|x_n\| \leqslant e^{c_1\tau/2}\|x_n\|.$$

Поэтому из (8) получим

$$\|x_{n+1}\| \leqslant \tilde{\rho}\,\|x_n\| + \tau\|A^{1/2}B^{-1}\varphi_n\|,$$

откуда и следует (7).

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть оператор $B(t)$ удовлетворяет условию Липшица и $B^*(t) = B(t) > 0$. Тогда, если выполнено условие устойчивости* (4) *с константой $\rho = e^{c_0\tau}$, $c_0 \geqslant 0$, то для решения задачи* (1) *справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{B(t_n)} \leqslant \tilde{\rho}^{\,n+1}\|y_0\|_{B(0)} + \sum_{n'=0}^{n} \tau\rho^{n-n'}\|\varphi(t_{n'})\|_{B^{-1}(t_{n'})}, \tag{9}$$

где $\tilde{\rho} = e^{\tilde{c}_0\tau}$, $\tilde{c}_0 = c_0 + c_1/2$.

Заметим, что если и оператор $A(t)$ является самосопряженным, то для оценки (9) достаточно условия (3).

3. Оценки, отличные от (7), можно получить, используя метод выделения стационарных неоднородностей, состоящий в следующем.

Пусть оператор $A(t)$ в схеме (1) является самосопряженным и положительным. Представим решение задачи (1) в виде суммы

$$y_n = v_n + w_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

где w есть решение уравнения

$$A(t_n)\,w(t_{n+1}) = \varphi(t_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Положим, кроме того, $w(0) = w(\tau)$. Для определения функции $v(t)$ получим задачу

$$B(t)v_t + A(t)v = \tilde{\varphi}, \quad v_0 = y_0 - w_1, \tag{12}$$

где $\tilde{\varphi} = -(B - \tau A) w_t$.

Решение v_{n+1} вспомогательной задачи (12) оценивается по теореме 1. После этого, используя неравенство треугольника, из (10) и (11) получаем оценку решения задачи (1).

Теорема 3. *При тех же условиях, что и в теореме 1, для решения задачи (1) справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leqslant \tilde{\rho}^{n+1}(\|y_0\|_{A(0)} + \|\varphi(0)\|_{A^{-1}(0)}) + \|\varphi(t_n)\|_{A^{-1}(t_n)} + \\ + \sum_{n'=1}^{n} \tau \tilde{\rho}^{n+1-n'} [c_1 \|\varphi_{n'-1}\|_{A^{-1}(t_{n'})} + \|\varphi_{n',\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_{n'})}], \tag{13}$$

где $\tilde{\rho} = e^{\tilde{c}_0\tau}$, $\tilde{c}_0 = c_0 + c_1/2$, $\varphi_{n,\bar{t}} = (\varphi_n - \varphi_{n-1})/\tau$.

Доказательство. Воспользовавшись методом выделения стационарных неоднородностей, получим оценку

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leqslant \|v_{n+1}\|_{A(t_n)} + \|\varphi(t_n)\|_{A^{-1}(t_n)}, \tag{1}$$

где v_{n+1} — решение задачи (12). Так же как и в теореме 1, для (12) может быть доказана оценка

$$\|v_{n+1}\|_{A(t_n)} \leqslant \tilde{\rho}\|v_n\|_{A(t_{n-1})} + \tau\|B^{-1}\tilde{\varphi}_n\|_{A(t_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$
$$\|v_1\|_{A(0)} \leqslant \rho\|v_0\|_{A(0)}.$$

Для оценки слагаемого $\|B^{-1}\tilde{\varphi}_n\|_A$ в (15) заметим, что

$$\|B^{-1}\tilde{\varphi}\|_A = \|SA^{1/2}w_t\|,$$

где $S = E - \tau C$, $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$.

Далее, согласно (11) имеем

$$w_t = (A^{-1}\varphi)_{\bar{t}} = A^{-1}\varphi_{\bar{t}} + (A^{-1} - \check{A}^{-1})\varphi(t_{n-1})/\tau,$$

так что справедлива оценка

$$\|A^{1/2}w_t\| \leqslant \|\varphi_{\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_n)} + \frac{1}{\tau}\|A^{1/2}(A^{-1} - \check{A}^{-1})A^{1/2}\|\|\varphi(t_{n-1})\|_{A^{-1}(t_n)}.$$

Отсюда, учитывая лемму 2, получим

$$\|B^{-1}\tilde{\varphi}_n\|_{A(t_n)} \leqslant \rho\{c_1\|\varphi_{n-1}\|_{A^{-1}(t_n)} + \|\varphi_{n,\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_n)}\}.$$

Таким образом, из (15) следует оценка

$$\|v_{n+1}\|_{A(t_n)} \leqslant \tilde{\rho}^{n+1}\|v_0\|_{A(0)} + \sum_{n'=1}^{n} \tau\rho^{n+1-n'}[c_1\|\varphi_{n'-1}\|_{A^{-1}(t_{n'})} + \|\varphi_{n',\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_{n'})}].$$

Наконец, замечая, что

$$\|v_0\|_{A(0)} \leqslant \|y_0\|_{A(0)} + \|w_1\|_{A(0)} = \|y_0\|_{A(0)} + \|\varphi_0\|_{A(0)},$$

получаем (13).

4. В случае перестановочных операторов удается получить более общие оценки.

Теорема 4. *Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условию Липшица, $A^*(t) = A(t) > 0$, $AB = BA$, $A(t)A(t-\tau) = A(t-\tau)A(t)$ при всех t и τ. Тогда, если выполнено условие устойчивости (3) с $\rho = e^{c_0\tau}$, $c_0 \geqslant 0$, то при*

$l = 0, 1, 2, \ldots$ *имеют место следующие оценки решения задачи* (1):

$$\| A^l(t_n)\, y_{n+1} \| \leqslant \tilde{\rho}^{n+1} \| A^l(0)\, y_0 \| + \sum_{n'=0}^{n} \tau \tilde{\rho}^{n-n'} \| A^l B^{-1} \varphi_{n'} \|, \tag{16}$$

$$\| A^l(t_n)\, y_{n+1} \| \leqslant \tilde{\rho}^{n+1} \| A^l(0)\, y_0 \| + \| A^{l-1}(t_n)\, \varphi_n \| + \tilde{\rho}^{n+1} \| A^{l-1}(0)\, \varphi_0 \| + \\ + \sum_{n'=1}^{n} \tau \tilde{\rho}^{n+1-n'} [c_1 \| A^{l-1}(t_{n'})\, \varphi_{n'-1} \| + \| A^{l-1}(t_{n'})\, \varphi_{n', \bar{t}} \|, \tag{17}$$

где $\tilde{\rho} = e^{\tilde{c}_0 \tau}$, $\tilde{c}_0 = c_0 + lc_1$.

Теорема 5. *Пусть оператор* $B(t)$ *удовлетворяет условию Липшица,* $B^*(t) = B(t) > 0$, $AB = BA$, $B(t)B(t-\tau) = B(t-\tau)B(t)$. *Тогда, если выполнено условие устойчивости* (4) *с* $\rho = e^{c_0 \tau}$, $c_0 \geqslant 0$, *то при* $l = 0, 1, 2, \ldots$ *для решения задачи* (1) *справедлива оценка*

$$\| B^l(t_n)\, y_{n+1} \| \leqslant \tilde{\rho}^{n+1} \| B^l(0)\, y_0 \| + \sum_{n'=0}^{n} \tau \tilde{\rho}^{n-n'} \| B^{l-1}(t_{n'})\, \varphi_{n'} \|, \tag{18}$$

где $\rho = e^{\tilde{c}_0 \tau}$, $\tilde{c}_0 = c_0 + lc_1$.

Замечание. 1. Если и оператор $A(t)$ является самосопряженным, то (18) выполняется при условии (3).

Замечание 2. Оценки (16), (18) с $l = 0$ имеют место и без требования липшиц-непрерывности.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). [2] А. А. Самарский, А. В. Гулин, ДАН, 181, № 5, 1042 (1968). [3] А. А. Самарский, И. В. Фрязинов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1, № 5, 806 (1961). [4] А. А. Самарский, Там же, 1, № 6, 972 (1961). [5] А. А. Самарский, Там же, 7, № 5, 1096 (1967).