Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 3

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А. М. НАХУШЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А. В. БИЦАДЗЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 X 1969)

Пусть Ω — конечная односвязная область трехмерного эвклидова пространства точек (x, y, z), ограниченная кусочно-гладкой поверхностью σ, расположенной в полупространстве $z > 0$, и двумя поверхностями S_1: $x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$ и S_2: $x_0 - x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x_0 > 0$, лежащими в полупространстве $z < 0$; $\Omega_1 = \Omega \cap (z < 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (z > 0)$; S_0 — часть плоскости $z = 0$, отделяющая Ω_1 от Ω_2; $\partial\Omega$ — граница Ω.

В области Ω рассмотрим трехмерное уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$Lu \equiv \operatorname{sign} z \cdot u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z), \tag{1}$$

которое эллиптично при $z > 0$, гиперболично при $z < 0$ и параболически вырождается при $z = 0$. Поверхности S_1 и S_2 являются характеристиками этого уравнения.

Задача А. В. Бицадзе. Найти непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}$ функцию $u(x, y, z)$ с непрерывными внутри Ω производными первого порядка, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω при $z \neq 0$ и краевому условию

$$u|_\sigma = 0, \qquad u|_{S_1} = 0 \tag{2}$$

или

$$u|_\sigma = 0, \qquad u|_{S_2} = 0. \tag{2*}$$

Примем следующие обозначения: $W_2^k(\Omega)$ — пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_k$ и со скалярным произведением $\langle\cdot, \cdot\rangle_k$, $k = 0, 1$; $W\,(W^*)$ — множество всех функций u из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus S_0) \cap W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$, для которых $Lu \in W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ и соблюдено условие (2) ((2*)); $n = (x_n, y_n, z_n)$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а $n^* = (-x_n, y_n, z_n)$ — конормаль, соответствующая оператору Лоренца $\Box \equiv -\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$; $lu \equiv au + bu_x + cu_y + du_z$ — дифференциальное выражение первого порядка с коэффициентами $a(x, y, z) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega_1}) \cap C^2(\overline{\Omega_2})$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, $d(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega_1}) \cap C^1(\overline{\Omega_2})$; A — множество всех четырехкомпонентных вектор-функций (a, b, c, d), которые в области Ω при $z \neq 0$ удовлетворяют системе дифференциальных неравенств

$$La > 0, \quad \operatorname{sign} z \cdot b_y + c_x = 0, \quad \operatorname{sign} z \cdot b_z + d_x = 0, \quad c_z + d_y = 0; \tag{3}$$

$$b_x - c_y + d_z > 2a, \quad b_x + c_y - d_z > 2a, \quad d(x, y, z) = 0; \tag{4}$$

$$\operatorname{sign} z \cdot (c_y + d_z - b_x - 2a) > 0, \quad \forall (x, y, z) \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

и краевым условиям

$$a = 0, \quad d = 0, \quad bx_n \pm cy_n \leqslant 0, \quad b^2 \geqslant c^2, \quad \forall (x, y, z) \in S_2. \tag{6}$$

Множество A не пусто. Ему принадлежат, например, векторы, компоненты которых имеют вид

$$a = \varepsilon\,[y^2 + z^2 - (x - x_0)^2], \quad b = b_1(x - x_0) + b_0, \quad c = c_1 y, \quad d = d(z), \tag{7}$$

где ε, b_1, b_0, c_1 — произвольные постоянные, такие что

$$\varepsilon > 0, \quad b_0 \leqslant 0, \quad c_1 > |2a|, \quad b_1 > c_1 + |2a|, \quad \forall (x, y, z) \in \overline{\Omega}, \tag{8}$$

а функция $d(z) = 0$ при $z \leqslant 0$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$2a + b_1 - c_1 < d'(z) < -2a + b_1 + c_1 \tag{9}$$

при $z \geqslant 0$. При $c_1 = 1$, $b_1 = \lambda$, $1 < \lambda < 2$ и достаточно малых положительных значениях ε функция $d = z$ является решением соотношения (9).

Неравенства (6) прямо следуют из (7) и (8), если учесть, что на характеристической поверхности S_2 имеем $\sqrt{2}x_n = 1$, $\sqrt{2}(x_0 - x)y_n = y$, $\sqrt{2}(x_0 - x)z_n = z$. Справедливость соотношений (3), (4) и (5) очевидна при соблюдении условий (8) и (9).

Ниже будем предполагать, что кусочно-гладкая поверхность σ обладает тем свойством, что хотя бы для одного вектора $(a, b, c, d) \in A$ почти везде на σ имеет место неравенство

$$n \cdot (b, c, d) = bx_n + cy_n + dz_n \geqslant 0. \tag{10}$$

Априорная оценка. *Для любой функции $u \in W$ имеет место энергетическое неравенство*

$$\| u \|_1 \leqslant C \| Lu \|_0, \tag{11}$$

где C — не зависящая от u постоянная.

Действительно, для любой функции $u \in W$ и любого вектора $(a, b, c, d) \in A$ справедливо тождество

$$2 \langle lu, Lu \rangle_0 = 2 \langle lu, \Delta u \rangle_0 + 2 \langle lu, \square u \rangle_0 =$$

$$= 2 \int_{S_2} u^2 \frac{\partial a}{\partial n^*} dS = \int_{\Omega} u^2 La \, d\Omega + \int_{\sigma} [(bx_n - cy_n - dz_n) u_x^2 +$$

$$+ (-bx_n + cy_n - dz_n) u_y^2 + (-bx_n - cy_n + dz_n) u_z^2 + 2(cx_n + by_n) u_x u_y +$$

$$+ 2(dx_n + bz_n) u_x u_z + 2(dy_n + cz_n) u_y u_z] \, dS + \int_{S_1 \cup S_2} [(-bx_n + cy_n + dz_n) u_x^2 +$$

$$+ (-bx_n + cy_n - dz_n) u_y^2 + (-bx_n - cy_n + dz_n) u_z^2 + 2(-cx_n + by_n) u_x u_y +$$

$$+ 2(-dx_n + bz_n) u_x u_z + 2(dy_n + cz_n) u_y u_z] \, dS +$$

$$+ \int_{\Omega} [\operatorname{sign} z \cdot (c_y + d_z - b_x - 2a) u_x^2 + (b_x - c_y + d_z - 2a) u_y^2 +$$

$$+ (b_x + c_y - d_z - 2a) u_z^2] \, d\Omega = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad I_3 = I_3(S_1) + I_3(S_2).$$

Поскольку $a = 0$ на S_2 и, как хорошо известно, конормаль n^* лежит на характеристике S_2, то, очевидно, $I_1 = 0$. Поверхность σ является поверхностью уровня, стало быть, на ней $u_x = u_n x_n$, $u_y = u_n y_y$, $u_z = u_n z_n$. Принимая это во внимание, легко видеть, что

$$I_3 = \int_{\sigma} (bx_n + cy_n + dz_n) |n|^2 u_n^2 dS = \int_{\sigma} (b, c, d) \, n u_n^2 dS,$$

из которого на основании (10) заключаем, что $I_3 \geqslant 0$.

Совершенно аналогично получаем

$$I_3(S_1) = \int_{\sigma} (b, c, d) \, n (y_n^2 + z_n^2 - x_n^2) \, u_n^2 \, dS = 0.$$

Матрица M квадратичной формы, стоящей под знаком интеграла $I_3(S_2)$, в силу (5) имеет вид

$$M = \begin{Vmatrix} cy_n - ax_n & by_n - cx_n & bz_n \\ by_n - cx_n & cy_n - bx_n & cz_n \\ bz_n & cz_n & -cy_n - bx_n \end{Vmatrix}.$$

Опираясь исключительно на тот факт, что на характеристике S_2 $y_n^2 + z_n^2 = x_n^2$, нетрудно показать, что при выполнении неравенства (6) все главные миноры матрицы M неотрицательны: $\det M = 0$, $(cy_n - bx_n)^2 - (by_n - cx_n)^2 = (b^2 - c^2) z_n^2$, $\quad -(c^2y_n^2 - b^2x_n^2) - c^2z_n^2 = (b^2 - c^2) x_n^2$, $-(c^2y_n^2 - b^2x_n^2) - b^2z_n^2 = (b^2 - c^2) y_n^2$.

Следовательно, согласно критерию Сильвестра, $I_3(S_2) \geqslant 0$.

Таким образом,

$$\int_\sigma [u^2 La + \operatorname{sgn} z\cdot(c_y + d_z - b_x - 2a)\, u_x^2 + (b_x - c_y + d_z - 2a)\, u_y^2 + (b_x + c_y - d_z - 2a)\, u_z^2]\, d\Omega \leqslant \varepsilon \|u\|_1^2 + C_1 \|Lu\|_0^2, \tag{12}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, C_1 — положительная постоянная, не зависящая от u.

Из энергетического неравенства (12) и условий (3), (4), (5) следует (11).

Совершенно идентично доказывается справедливость априорной оценки (11) для любой функции $u \in W^*$.

Неравенство (11) обобщает априорную оценку, полученную А. В. Бицадзе в работе [1].

Простым интегрированием по частям можно показать, что

$$\langle u, Lv\rangle_0 = \langle v, Lu\rangle_0, \quad \forall u \in W, \quad v \in W^*,$$

поэтому задачи (1) — (2) и (1) — (2*) являются (формально) взаимно сопряженными.

Из априорной оценки (11) *вытекает единственность регулярного* (*классического*) *решения* $u \in W$ *или* $v \in W^*$ *задачи А. В. Бицадзе.*

При $\sigma = S^*$, где S^* состоит из двух конических поверхностей S_3: $x_0 - x = \sqrt{y^2 + z^2}$ и S_4: $x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$, этот факт был впервые установлен в [1].

Пусть теперь правая часть $f(x, y, z)$ уравнения (1) принадлежит гильбертову пространству $W_2^{-1}(\Omega)$ с негативной нормой $\|\cdot\|_{-1}$ и со скалярным произведением $\langle\cdot, \cdot\rangle_{-1}$.

С л а б ы м р е ш е н и е м задачи А. В. Бицадзе назовем любую функцию $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$\langle u, Lv\rangle_0 = \langle f, v\rangle_{-1}, \quad \forall v \in W^*.$$

Доказательство существования слабого решения проводится по обычной схеме (см., например, [2], стр. 152; [3], стр. 107), которую мы воспроизводим для удобства чтения.

Согласно априорной оценке (11), справедливой для любой функции $v \in W^*$, выражение $\langle f, v\rangle_{-1}$ зависит не от v, а от Lv, и поэтому можно положить $\langle f, v\rangle_{-1} = F(Lv)$, где F — однородный и аддитивный функционал над линейным множеством $L(W^*)$. Далее, на основании (11) и обобщенного неравенства Шварца, имеем

$$|F(Lv)| = |\langle f, v\rangle_{-1}| \leqslant \|f\|_{-1} \|v\|_1 \leqslant C \|f\|_{-1} \|Lv\|_0,$$

т. е. при фиксированном $f \in W_2^{-1}(\Omega)$ функционал $F(\varphi)$, $\varphi = Lv$, над $L(W^*)$ является непрерывным. Продолжая $F(\varphi)$ по известной теореме Хана — Банаха на все пространство $L_2(\Omega)$ и пользуясь теоремой Рисса, найдем искомую функцию u: $F(\varphi) = \langle\varphi, u\rangle_0$, $\forall\varphi \in L_2(\Omega)$ и, в частности, для $\varphi = Lv$ $\langle Lv, u\rangle_0 = F(Lv) = \langle f, v\rangle_{-1}$.

Энергетическое неравенство (11)

$$\| u \|_1 \leqslant C \| Lu \|_0, \quad \forall u \in W \cup W^*$$

обеспечивает также существование полусильного решения задачи А. В. Бицадзе (*см.* ([3]), *стр.* 98—99).

Среди работ, посвященных исследованию краевых задач для уравнения смешанного типа в многомерных ограниченных областях, следует отметить работу ([4]), где изучается задача типа задачи Дирихле.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, ДАН, 143, № 5, 1017 (1962). [2] А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, М., 1959. [3] Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. [4] Г. Д. Каратопраклиев, ДАН, 188, № 6 (1969).