Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 1

УДК 513.88:513.83

МАТЕМАТИКА

Б. Е. ВЕЙЦ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЛАДКИХ ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 II 1970)

1. Известно, что если система элементов (e_k) является ортонормированной в гильбертовом пространстве, то она образует безусловный базис в замыкании $[e_k]$ своей линейной оболочки. Понятие ортогональности может быть введено и в произвольном пространстве Банаха ([1–3]). Несколько обобщая определение из работы ([3]), мы будем называть систему (e_k) элементов банахова пространства E ортонормированной, если элементы этой системы взаимно ортогональны: $e_i \perp e_k$ при $i \neq k$ и $\| e_k \| = 1$ при $k = 1, 2, \ldots$ Если при этом система (e_k) образует базис в замыкании $[e_k]$ своей линейной оболочки, то этот базис будем называть ортонормированным. Понятие ортогонального базиса в пространствах Банаха различной степени общности было введено в работах ([4–6]). По определению В. Я. Козлова ([4]), базис (x_k) называется ортогональным, если для всех $x \in E$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k \right\| \leqslant \|x\|, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Через (f_k) обозначена система линейных функционалов, биортогональных к базису (x_k). По определению Джеймса, базис (x_k) называется ортогональным, если для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+m}$ и всех натуральных n и m

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n+m} a_k x_k \right\|.$$

Оба указанных определения эквивалентны. Из этих определений легко следует, что $x_i \perp x_k$ при $i < k$, $k = 1, 2, \ldots$ Взаимная же ортогональность из этих определений, вообще говоря, не следует. Более того, как показано Г. Ауэрбахом (([7]), стр. 205), в любом конечномерном банаховом пространстве существуют ортонормированные базисы, но даже в некоторых трехмерных пространствах, как установлено М. З. Соломяком ([8]), эти базисы могут не быть ортогональными в смысле Козлова — Джеймса.

В настоящей работе мы, в частности, укажем такие условия гладкости единичной сферы банахова пространства и его сопряженного, которые гарантируют базисность ортонормированной системы элементов.

2. Пусть E — сепарабельное пространство Банаха над полем вещественных чисел. Известно ([2, 7]), что для того чтобы норма $x \mapsto \|x\|$ была дифференцируема в смысле Гато в точке $x \in E$ по любому направлению $h \in E$, необходимо и достаточно, чтобы существовал единственный функционал $f_x \in S^* = \{f \in E^* \mid \|f\| = 1\}$ такой, что $f_x(x) = \|x\|$. В этом случае вариация функции φ: $x \mapsto \|x\|$ в точке x равна

$$\delta\varphi(x; h) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \|x + th\| = \lim_{t \to 0} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} = f_x(h),$$

а производная Гато $\varphi'(x) = f_x$.

Л е м м а 1. $x \perp y \Leftrightarrow f_x(y) = 0$.

С л е д с т в и е. *Если в пространстве E норма дифференцируема по Гато, то ортонормированная система является ортонормальной и в смысле Левина и Петунина* ([3]), *т. е. каждый элемент этой системы ортогонален линейной оболочке остальных элементов.*

Банахово пространство E назовем гладким, если и в E и в E^* нормы дифференцируемы по Гато. В этом случае ([9], [10]) пространство E рефлексивно, причем оба пространства E и E^* являются строго нормированными.

Л е м м а 2. *Если в гладком пространстве E элементы e_1 и e_2 взаимно ортогональны и нормированы, то производная функции $\varphi\colon x \mapsto \|x\|$ в точке $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in R$) является линейной комбинацией производных этой функции в точках e_1 и e_2, т. е. для любых вещественных чисел α_1 и α_2 найдутся вещественные числа λ_1 и λ_2 такие, что*

$$f_{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2} = \lambda_1 f_{e_1} + \lambda_2 f_{e_2}\,^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем следующие обозначения:

$$E_2 = \{x \in E \,|\, x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2;\ \alpha_1 \in R;\ \alpha_2 \in R\},$$
$$F_2 = \{y \in E \,|\, f_{e_1}(y) = f_{e_2}(y) = 0\}.$$

Используя взаимную ортогональность элементов e_1 и e_2, легко показать, что $E = E_2 \oplus F_2$. Из линейной независимости функционалов f_{e_1} и f_{e_2} вытекает, что $E_2^* = \{f \in E^* \,|\, f = \lambda_1 f_{e_1}|_{E_2} + \lambda_2 f_{e_2}|_{E_2}\}$, где через $f_{e_1}|_{E_2}$ и $f_{e_2}|_{E_2}$ обозначены сужения функционалов f_{e_1} и f_{e_2} на подпространство E_2. Из гладкости подпространства E_2 вытекает существование для элемента $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in E$ единственного функционала $f_x = \lambda_1 f_{e_1}|_{E_2} + \lambda_2 f_{e_2}|_{E_2} \in E_2^*$ такого, что $\|f_x\|_{E_2^*} = 1$; $f_x(x) = \|x\|$, и существование единственного элемента $x_0 \in E_2$, $\|x_0\| = 1$, такого, что $f_x(x_0) = \|f_x\|_{E_2^*} = 1$.

Рассмотрим функционал

$$f = \lambda_1 f_{e_1} + \lambda_2 f_{e_2}$$

и покажем, что он является продолжением (единственным) функционала f_x на все E с сохранением нормы. В самом деле, пусть элемент $z_0 \in E$ — тот единственный элемент, для которого $\| z_0 \| = 1$ и $f(z_0) = \| f \|_{E^*}$. Если $z_0 = x_0' + y_0$, где $x_0' \in E_2$, $y_0 \in F_2$, то

$$\|f\|_{E^*} = f(z_0) = f(x_0' + y_0) = \lambda_1 f_{e_1}(x_0' + y_0) + \lambda_2 f_{e_2}(x_0' + y_0) =$$
$$= \lambda_1 f_{e_1}(x_0') + \lambda_2 f_{e_2}(x_0') = f(x_0').$$

Следовательно, $x_0' = z_0$; $y_0 = 0$. Учитывая, что $f|_{E_2} = \lambda_1 f_{e_1}|_{E_2} + \lambda_2 f_{e_2}|_{E_2}$, имеем $\| f \|_{E^*} = \| f_x \|_{E_2^*} = f_x(x_0') = 1$. Следовательно, $x_0' = x_0$ и $f(x) = f_x(x) = \| x \|$. Поэтому

$$f_x = f_{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2} = f = \lambda_1 f_{e_1} + \lambda_2 f_{e_2}.$$

Л е м м а 3. *Если система $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ элементов гладкого банахова пространства E ортонормирована, то для любой точки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ найдется и притом единственная точка $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n$ такая, что*

$$f_{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n} = \lambda_1 f_{e_1} + \lambda_2 f_{e_2} + \ldots + \lambda_n f_{e_n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $n = 2$ лемма доказана. Допустим, что она справедлива для $n = k$. Тогда, учитывая, что по предположению элементы e_{k+1} и $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ взаимно ортогональны, имеем

$$f_{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1}} = f_{\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k\| \frac{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k}{\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k\|} + \alpha_{k+1} e_{k+1}} =$$

---

* По терминологии М. З. Соломяка элементы e_1 и e_2 «связаны» ([8]).

$$= \lambda f_{\alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_k e_k} + \lambda_{k+1} f_{e_{k+1}} = \lambda\mu_1 f_{e_1} + \ldots + \lambda\mu_k f_{e_k} + \lambda_{k+1} f_{e_{k+1}} =$$
$$= \lambda_1 f_{e_1} + \ldots + \lambda_k f_{e_k} + \lambda_{k+1} f_{e_{k+1}}.$$

Теорема. *Если E — гладкое пространство Банаха и (e_k) — ортонормированная система в этом пространстве, то она образует безусловный базис в замыкании $[e_k]$ своей линейной оболочки. Этот базис является строго ортогональным в смысле И. Зингера, а значит, тем более, в смысле Козлова — Джеймса.*

Доказательство. Согласно определению И. Зингера, требуется доказать, что для любых двух непересекающихся множеств $\{p_i\}_1{}^n$ и $\{q_j\}_1{}^m$ натуральных чисел и произвольных вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{p_k} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j e_{q_j} \right\| \geqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{p_k} \right\|,$$

при этом знак равенства имеет место только когда $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$.

Пусть $\{p_i\}_1{}^n \subset N$; $\{q_j\}_1{}^m \subset N$ и $\{p_i\} \cap \{q_j\} = \phi$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — произвольные вещественные числа. Согласно лемме 3, точке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ соответствует единственная точка $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n$ такая, что

$$f_{\alpha_1 e_{p_1} + \alpha_2 e_{p_2} + \ldots + \alpha_n e_{p_n}} = \lambda_1 f_{e_{p_1}} + \lambda_2 f_{e_{p_2}} + \ldots + \lambda_n f_{e_{p_n}}, \quad \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{e_{p_k}} \right\|_{E^*} = 1.$$

Тогда

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{p_k} \right\| = f_{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_{p_k}} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{p_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{e_{p_k}} \left(\sum_{k=1} \alpha_k e_{p_k} \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{e_{p_k}} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{p_k} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j e_{q_j} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{e_{p_k}} \right\|_{E^*} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{p_k} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j e_{q_j} \right\|_{E} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{p_k} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j e_{q_j} \right\|.$$

При этом, очевидно, знак равенства имеет место только в случае, когда $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Во всяком гладком банаховом пространстве существует бесконечномерное подпространство с ортонормированным базисом, а значит, и безусловным, строго ортогональным в смысле И. Зингера.*

Утверждение вытекает из теоремы А. Ю. Левина и Ю. И. Петунина ([3]) о существовании в любом банаховом пространстве бесконечной ортонормированной системы. Следствие 1 частично решает проблему, поставленную Ц. Бессагой и А. Пелчинским ([11]), о существовании в любом банаховом пространстве безусловной базисной системы.

Следствие 2. *Тригонометрическая система не является ортонормированной в L^p $([0, 2\pi])$ ни при одном p.*

Утверждение вытекает из установленного М. З. Соломяком ([8]) факта, что тригонометрическая система не образует ортогонального базиса в смысле Козлова — Джеймса в $L^p([0; 2\pi])$ ни при одном p.

3. Пусть гладкое пространство E плотно вложено в некоторое гильбертово пространство H: $E \neq H$ и $\| x \|_H \leqslant \| x \|_E$ для $x \in E$. После естественных отождествлений можно считать, что $E \subset H \subset E^*$. Пусть система $(e_k) \subset E$ является ортонормированной в H.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для того чтобы при указанных условиях система* $(e_k / \| e_k \|_E)$ *была ортонормированной в* E, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*:

$$\| e_k \|_E \, \| e_k \|_{E^*} = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Если система элементов $x_k = e_k / \| e_k \|_E$, $k = 1, 2, \ldots$, является ортонормированной в E, то биортогональными к ним функционалами являются функционалы $f_k = \| e_k \|_E e_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и так как $\| f_k \|_{E^*} = 1$, то $\| e_k \|_E \, \| e_k \|_{E^*} = 1$, $k = 1, 2, \ldots$

Д о с т а т о ч н о с т ь. При условиях (1)

$$\| f_k \|_{E^*} = \| e_k \|_E \, \| e_k \|_{E^*} = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и так как $\| x_k \|_E = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, то система (x_k) ортонормирована в E.

П р и м е р 1. Ортонормированная в $L^2([0, 1])$ система Хаара является ортонормированной в $L^p([0, 1])$ при любом $p > 1$.

$$e_1(t) \equiv 1; \qquad e_{2^n+k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } t \in [(2k-2)/2^{n+1}, (2k-1)/2^{n+1}), \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } t \in [(2k-1)/2^{n+1}, 2k/2^{n+1}], \\ 0 & \text{при остальных } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Легко видеть, что для всех p, n и k

$$\| e_{2^n+k} \|_p \, \| e_{2^n+k} \|_{p'} = 1.$$

П р и м е р 2. Ортонормированная в $L^2([0, 1])$ система (r_k) Радемахера является ортонормированной в любом $L^p([0, 1])$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* (e_k) — *ортонормированная система в* E. *Для того чтобы система* $x_k = e_k / \| e_k \|_H$ *была ортонормированной и в* H, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\| e_k \|_H^2 = \| e_k \|_{E^*}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Если система (x_k) ортонормирована в H, то согласно предложению 1

$$1 = \| x_k \|_E \, \| x_k \|_{E^*} = \left\| \frac{e_k}{\| e_k \|_H} \right\| \, \left\| \frac{e_k}{\| e_k \|_H} \right\|_{E^*} = \frac{\| e_k \|_{E^*}}{\| e_k \|_H^2},$$

а это и означает, что

$$\| e_k \|_H^2 = \| e_k \|_{E^*}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из условий $\| e_k \|_{H^2} = \| e_k \|_{E^*}$, $k = 1, 2, \ldots$, следует, что $\| e_k / \| e_k \|_{H^2} \|_{E^*} = 1$ и функционалы $f_k \in E^*$, $k = 1, 2, \ldots$, порожденные элементами $y_k = e_k / \| e_k \|_{H^2}$: $f_k(x) = (x, y_k)$, удовлетворяют соотношениям $\| f_k \|_{E^*} = 1$, $f_k(e_k) = 1$. Но тогда $f_k = f_{e_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, и поэтому при $i \neq k$ $0 = f_{e_i}(e_k) = (e_k, y_i) = (e_k, e_i / \| e_i \|_{H^2})$. Полученные соотношения ортогональности и завершают доказательство.

Мурманский государственный
педагогический институт

Поступило
4 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Birkhoff, Duke Math. J., **1**, 169 (1935). [2] R. C. James, Trans. Am. Math. Soc., **161**, № 2, 265 (1947). [3] А. Ю. Левин, Ю. И. Петунин, УМН, **18**, в. 3, 167 (1963). [4] В. Я. Козлов, Матем. сборн., **26** (68), 1, 85 (1950). [5] R. C. James, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **37**, 174 (1950). [6] И. Зингер, УМН, **17**, в. 1, 169 (1962). [7] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [8] М. З. Соломяк, Вестн. ЛГУ, № 1, 27 (1957). [9] В. Шмульян, Матем. сборн., 6, № 1 (1939). [10] K. Sandaresan, Math. Ann., **173**, 191 (1967). [11] C. Bessaga, A. Pelczynski, Stud. Math., **17**, 165 (1958).