Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Т. Г. ПЛЕТНЕВА, С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

ТЕОРЕМЫ О ТРЕХ ЦИЛИНДРАХ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 XI 1969)

Здесь мы с помощью специальных алгебраических условий выделяем классы эволюционных уравнений любого порядка, содержащие, например, кроме параболических, уравнения типа уравнений поперечных колебаний упругих пластин и стержней, для которых получены L_1-оценки решений, не содержащие значений решений на начальной гиперплоскости, а в случае цилиндров, примыкающих к границе,— значений решений на граничной гиперповерхности. Исследованием охватываются уравнения, имеющие на начальной гиперповерхности (граничной гиперповерхности) степенные особенности.

Методы, используемые нами, весьма близки к изложенным в [1] и являются их естественным продолжением и развитием.

1. Условия. Обозначения. Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv \mathscr{L}\left(t,x;\frac{\partial}{\partial t},D_x\right)u \equiv \sum_{k_0p+|k|\leqslant m} a'_{k_0k}(t,x)\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}D_x^k u(t,x) = f(t,x). \quad (1)$$

Введем ряд необходимых для формулировки результатов условий:

А. Оператор $\mathscr{L}$ имеет сопряженный по Лагранжу оператор

$$\mathscr{L}^*\left(t,x;\frac{\partial}{\partial t},D_x\right) \equiv \sum_{k_0p+|k|=m} a_{k_0k}(t,x)\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}D_x^k + \sum_{k_0p+|k|<m} a_{k_0k}(t,x)\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}D_x^k \equiv$$
$$\equiv P_0(t,x;\partial/\partial t,D_x) + P_1(t,x;\partial/\partial t,D_x); \quad p>1; \quad \nu = m/p.$$

В. Многочлены

В$_1$. $P_0(t,x;0,\sigma)$,

В$_2$. $P_0(t,x;\sigma_{n+1}^p,\sigma)$.

В$_{3,\beta}$. $$Q_{0,}(t,x,\sigma') = \sum_{\mu=1}^{\nu}\prod_{l=1}^{\mu-1}\left(1-\frac{l}{\beta}\right)\frac{1}{\mu!}\frac{\partial^\mu}{\partial\lambda^\mu}P_0(t,x;\lambda,\sigma)\Big|_{\lambda=0}\sigma_{n+1}^{p\mu},$$

$p\geqslant\nu$, $\sigma'=(\sigma_{n+1},\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$.

В$_4^{(\alpha)}$. $$T_0^{(\alpha)}(t,x,\sigma') \equiv \sum_{\mu=0}^{\nu}\prod_{l=1}^{m-p\mu-1}\left(1-\frac{l}{\alpha}\right)\frac{1}{\mu!}\frac{\partial^\mu P_0}{\partial\lambda^\mu}\Big|_{\lambda=0}\sigma_{n+1}^{p\mu},\ \alpha\geqslant m.$$

В$_5^{(\gamma)}$. $$Q_0^{(\gamma)}(t,x;\sigma') \equiv \sum_{q=0}^{m}\prod_{l=1}^{q-1}\left(1-\frac{l}{\gamma}\right)\frac{1}{q!}\frac{\partial^q P_0}{\partial\sigma_n^q}\Big|_{\sigma_n=0}\sigma_n^q,\ \gamma\geqslant m.$$

В$_{6,\beta}^{(\gamma)}$. $$R_{0\beta}^{(\gamma)}(t,x;\sigma') \equiv \sum_{\mu=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{m}\prod_{l=1}^{\mu-1}\left(1-\frac{l}{\beta}\right)\prod_{s=1}^{q-1}\left(1-\frac{s}{\gamma}\right)\frac{1}{\mu!q!}\times$$
$$\times\frac{\partial^{\mu+q}P_0}{\partial\lambda^\mu\partial\sigma_n^q}\Big|_{\sigma_n=0,\lambda=0}\sigma_{n+1}^{p\mu}\sigma_n^q$$

равномерно эллиптические с постоянной равномерной эллиптичности δ_0, δ_1, δ_β, $\delta^{(\alpha)}$, $\delta_1^{(\gamma)}$, $\delta_\beta^{(\gamma)}$ соответственно.

С. Область значений многочленов

С$_1$. $P_0(t,x;0,\sigma)$. С$_2$. $P_0(t,x;\sigma_{n+1}^p,\sigma)$. С$_{3,\beta}$. $Q_{0\beta}(t,x;\sigma')$.

С$_4^{(\alpha)}$. $T_0^{(\alpha)}(t,x;\sigma')$. С$_5^{(\gamma)}$. $Q_0^{(\gamma)}(s,x;\sigma')$. С$_{6,\beta}^{(\gamma)}$. $R_{0\beta}^{(\gamma)}(t,x;\sigma')$

при любых вещественных σ' лежит в конусе (секторе) K_{φ_1}: $|\arg z| \leqslant \varphi_1 < \pi/2$ комплексной z-плоскости.

E. Коэффициенты $a_{k_0 k}(t, x)$ многочлена $\mathscr{L}^*(t, x; \lambda, \sigma)$: E_1. Равномерно ограничены постоянной e_1. E_2. При $k_0 p + |k| = m$ равномерно непрерывны. E_3. $a_{k_0 k}(bt, b^{1/p}x)\, b^{(m-k_0 p-|k|)/p}$, $b \in (0, 1)$, равномерно ограничены постоянной e_3.

Условие B_1 означает эллиптичность пространственной части оператора $\mathscr{L}$, условие B_2 будем называть квазиэллиптичностью этого оператора; заметим, что при достаточно больших β; α; β и γ условия $\mathrm{B}_{3,\beta}$, $\mathrm{C}_{3,\beta}$, $\mathrm{B}_4^{(\alpha)}$, $\mathrm{C}_4^{(\alpha)}$; $\mathrm{B}_{5,\beta}^{(\gamma)}$, $\mathrm{C}_{5,\beta}^{(\gamma)}$ следуют из условий B_2, C_2 соответственно. Если коэффициенты многочлена $P_0(t, x; \lambda, \sigma)$ вещественны, то условия C (с $\varphi_1 = 0$) следуют из условий B. Полезно заметить, что при $\beta = \nu$, $\gamma = m$:

$$Q_{0\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} C_\nu^\mu \frac{\partial^\mu}{\partial \lambda^\mu} P_0 \big|_{\lambda=0} \sigma_{n+1}^{p\mu}, \quad Q_0^{(m)} = \sum_{q=0}^{m} C_m^q \frac{\partial^q}{\partial \sigma_n^q} P_0 \Big|_{\sigma_n=0} \sigma_n^q;$$

$$R_{0\nu}^{(m)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{q=0}^{m} C_\nu^\mu C_m^q \frac{\partial^{\mu+q}}{\partial \lambda^\mu \partial \sigma_n^q} P_0 \Big|_{\lambda=0, \sigma_n=0} \sigma_{n+1}^{p\mu} \sigma_n^q.$$

В случае уравнения первого порядка по t:

$$P_0(t, x; \lambda, \sigma) = \lambda + \sum_{|k|=m} a_k(t, x)\, \sigma^k, \quad \nu = 1, \quad m = p,$$

$$Q_{01}(t, x; \sigma') \equiv P_0(t, x; \sigma_{n+1}^p, \sigma) = \sigma_{n+1}^m + \sum_{|k|=m} a_k(t, x)\, \sigma^k,$$

$$R_{01}^{(m)}(t, x; \sigma') = Q_0^{(m)}(t, x; \sigma') = \sigma_{n+1}^m + \sum_{q=0}^{m} C_m^q \frac{\partial^q}{\partial \sigma_n^q} P_0(t, x; 0, \sigma) \Big|_{\sigma_n=0} \sigma_n^q.$$

В частности, при $m = 2$ $Q_{01} \equiv \sigma_{n+1}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\, \sigma_i \sigma_j$, $a_{ij}(t, x)$ — вещественные функции, условия $\mathrm{B}_5^{(2)}$, $\mathrm{B}_{6,1}^{(2)}$ означают эллиптичность многочленов $Q_0^{(2)}$, $R_{01}^{(2)}$; наилучшим инвариантным к поворотам в пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ условием этого является неравенство $\lambda_1 < (n + 2 + 2\sqrt{2})\lambda_n$, λ_1 — наибольшее, λ_n — наименьшее характеристические числа матрицы $(a_{ij})_1^n$.

Если многочлен $P_0(t, x, \sigma_{n+1}^p, \sigma)$ с вещественными положительными коэффициентами содержит только четные степени $\sigma_{n+1}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, то все описанные выше условия автоматически выполнены. В частности, они выполнены для многочлена $\sigma_{n+1}^2 + a^2(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)^2$, соответствующего уравнению поперечных упругих колебаний. Если оператор имеет вид $\mathscr{L}u \equiv \sum_{k_0 p+|k| \leqslant m} (-1)^{k_0+|k|} \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} D_x^k (a_{k_0 k}(t, x)\, u)$, то от коэффициентов $a_{k_0 k}(t, x)$ достаточно требовать лишь ограниченности.

Определим конус (сектор) K комплексной z-плоскости неравенством $K = K_{\varphi_2} = \{z;\ |\arg z| \leqslant \varphi_2 < \pi/2 - \varphi_1\}$. С помощью конуса K функцию $u(t, x)$ представим в виде $u(t, x) = u^+(t, x) - u^-(t, x)$, где $u^+(t, x) = u(t, x)$, если $u \in K$; $u^+(t, x) = 0$, если $u \overline{\in} K$. Обозначим $\Pi_{(\tau, T), R} = \{(t, x),\ \tau < t < T, |x| < R\}$; $\Pi_{(\tau, T), R}^{(\eta)} = \Pi_{(\tau, T) R} \cap \{x_n > \eta\}$, $\Pi_{(0, T), R}^{(0)} = \Pi_{T, R}^+$; $\Pi_{(0, T), R} = \Pi_{T, R}$; $M(r) = r$ при $r \in [0, 1)$; $M(r) = 1$ при $r \geqslant 1$,

$$\|u\|_{(\tau, T), R; \beta} = \iint_{\Pi_{(\tau, T), R}} M[t^\beta]\, |u|\, dt\, dx;$$

$$\{u\}_{(\tau, T), R, \eta; \beta, \gamma; q} = \iint_{\Pi_{(\tau, T) R}^{(\eta)}} M[(t^\nu + |x|^m)^q]\, M[t^\beta]\, M[x^\gamma]\, |u|\, dt\, dx;$$

$$\|u\|_{(0,\,T),\,R;\,\beta} = \|u\|_{T,\,R;\,\beta}; \qquad \{u\}_{(0,\,T),\,R,\,0;\,,\,\beta,\,\gamma,\,q} = \{u\}_{T;\,R;\,\beta;\,\gamma;\,q};$$

$$\langle u\rangle_{(-T_1,\,T),\,R;\,\alpha} = \iint\limits_{\Pi_{(-T_1,\,T),\,R}} (R^2 - x^2)^{\alpha}\,|u|\,dt\,dx.$$

2. Теоремы о трех цилиндрах.

Теорема 1. *Выполнены условия* A_1, B_1, C_1 *в* $\overline{\Pi}_{T,\,2}$, $B_{3,\,\beta}$, $C_{3,\,\beta}$ *в* $\overline{\Pi}_{\varepsilon_0,\,2}$; E_3 *в* $\overline{\Pi}_{Tb^{-1},\,2b^{-1/p}}$ (*если предполагать* E_2 *в* $\overline{\Pi}_{T,\,2}$, *то* C_1 *излишне, а* $B_{3,\,\beta}$, $C_{3,\,\beta}$ *достаточно предполагать при* $t = 0$).

Пусть $u(t, x)$ — *слабое решение уравнения* (1) *в* $\Pi_{T,\,2}$. *Тогда найдутся положительные постоянные* h_1, b_1, λ_2, *зависящие лишь от* n, m, p, δ_0, δ_β, φ_1, e_3, ε_0, *такие, что для любого* $h \in (0, h_1)$ *справедлива оценка*

$$\|u\|_{T-h,\,1+b,\,b^{1/p};\,\beta-\nu} \leqslant \lambda_1(\|u\|_{(\varepsilon_0,\,T),\,1;\,\beta-\nu} + \|u^-\|_{T,\,2;\,\beta-\nu} + \|f\|_{T,\,2;\,\beta}).$$

Теорема 2. *Выполнены условия* A, E_1 *в* $\Pi_{(-T_1,\,T),\,R}$; $B_4^{(\alpha)}$, $C_4^{(\alpha)}$ *в* $\Pi_{(-T,\,0],\,R}$ (*если предполагать* E_2 *в* $\Pi_{(-T_2,\,0],\,R}$, *то* $B_4^{(\alpha)}$, $C_4^{(\alpha)}$ *достаточно предполагать при* $t = 0$).

Пусть $u(t, x)$ — *слабое решение уравнения* (1) *в* $\Pi_{(-T_1\,T),\,R}$; *тогда найдутся положительные постоянные* t_0, λ_2, *зависящие лишь от* n, m, p, $\delta^{(\alpha)}$, φ_1, e_1, ε_0, R, *такие, что*

$$\langle u\rangle_{(-t_0,\,T),\,R;\,\alpha-m} \leqslant \lambda_2(\langle u\rangle_{T,\,R;\,\alpha-m} + \langle u^-\rangle_{(-T_1,\,T),\,R;\,\alpha-m} + \langle f\rangle_{(-T_1,\,T),\,R,\,\alpha}).$$

Теорема 3. *Выполнены условия* A, B_1, C_1 *в* $\overline{\Pi}^+_{T,\,2}$; $B_{3,\,\beta}$, $C_{3,\,\beta}$ *в* $\overline{\Pi}^+_{\varepsilon_0,\,2}$, $B_5^{(\gamma)}$, $C_5^{(\gamma)}$ *в* $\overline{\Pi}^+_{T,\,2} \cap \{x_n \in [0, \varepsilon_0)\}$; $B^{(\gamma)}_{6,\,\beta}$, $C^{(\gamma)}_{6,\,\beta}$ *в* $\overline{\Pi}^+_{\varepsilon_0,2} \cap \{x_n \in [0,\ \varepsilon_0)\}$, E_3 *в* $\overline{\Pi}^+_{Tb^{-1},\,2b^{-1/p}}$ (*если предположить* E_2 *в* $\overline{\Pi}_{T,\,2}$, *то* C_1 *излишне*, $B_{3,\,\beta}$, $C_{3,\,\beta}$ *достаточно предполагать при* $t = 0$; $B_5^{(\gamma)}$, $C_5^{(\gamma)}$ *при* $x_n = 0$; $B^{(\gamma)}_{6,\,\beta}$, $C^{(\gamma)}_{6,\,\beta}$ *при* $t = 0,\ x_n = 0$).

Пусть $u(t, x)$ — *слабое решение уравнения* (1) *в* $\Pi^+_{T,2}$, *тогда найдутся положительные постоянные* h_2, b_2, λ_3, *зависящие лишь от* n, m, p, δ_0, $\delta_1^{(\gamma)}$, $\delta_\beta^{(\gamma)}$, δ_β, φ_1, ε_0, e_3 *такие, что для любого* $h \in (0, h_2)$ *справедлива оценка*

$$\{u\}_{T-h,\,1+b_2h^{1/p};\ \beta-\nu,\,\gamma-m;\,1} \leqslant \lambda_3(\{u\}_{(\varepsilon_0,\,T),\,1,\,\varepsilon_0,\,0,\,0;0} + \{u^-\}_{T,\,2;\,\beta-\nu,\,\gamma-m;\,1} + \{f\}_{T,\,2;\,\beta,\,\nu;\,0}).$$

Доказательства теорем 1, 3 проводятся с помощью обкладок исходного цилиндра лунками, полулунками, четвертями лунок, в которых норма положительной части оценивается при сделанных предположениях на основании «знакоопределенности» $\mathscr{L}^*\Phi$, в качестве Φ берутся соответственно функции вида $t^\beta(1 - x^2 - t^2)^\alpha$, $t^\beta x_n{}^\gamma(1 - x^2 - t^2)^\alpha$, $x_n{}^\gamma(1 + x^2 - t^2)^\alpha$, теорема 2 — с помощью обкладки всего цилиндра $\Pi_{T,\,R}$ снизу цилиндром малой высоты и использования функции $t^\beta(R^2 - x^2)^\alpha$.

Отметим, что при $\beta = \nu$, $\alpha = m$, $\gamma = m$ теоремы 1, 2 дают L_1-оценки решений, при $\beta > \nu$, $\alpha > m$, $\gamma > m$ — оценки в пространстве с соответствующим весом, при этом решениям разрешается иметь особенности на начальной, граничной гиперплоскости любого степенного порядка (при любых β, α, γ). Если β, α, γ велики, то все оценки справедливы в предположении квазиэллиптичности многочлена $P_0(t, x; \lambda, \sigma)$ и выполнимости условия C_2.

Теоремы 1, 2, 3 имеют разнообразные приложения. Изложим некоторые из них.

3. Принадлежность положительных решений квазиэллиптических уравнений пространству $L_1^{(\beta,\,\gamma)}(Q_{T_1})$. Пусть $Q_T = (0, T) \times \Omega$, Ω — ограниченная область с границей S, принадлежащей классу $C^{m+\eta}$ ([2]), обозначим через $\boldsymbol{\nu}(x)$ внутреннюю нормаль к S в точке x. Тогда, как обычно, можно многочлен $P_0(t, x; \sigma^p_{n+1}, \sigma)$ записать в координатах, соответствующих полупространству $\boldsymbol{\nu}\cdot x > 0$ в виде $P_0(t, x; \sigma^p_{n+1}, \theta' + \boldsymbol{\nu}\theta_n) \equiv P_{0\nu}(t, x; \sigma^p_{n+1}, \theta)$, $\theta' = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, 0)$, и по многочлену $P_{0\nu}$ определить $Q^{(\gamma)}_{0\nu}$, $R^{(\gamma)}_{0\nu,\,\beta}$, условия B и C для этих многочленов предполагаются выполненными равномерно по $\boldsymbol{\nu}$. Через Ω_{ε_0} обозначим совокупность точек области Ω, лежащих от S на расстоянии больше ε_0, $Q_{(\varepsilon_0,\,T),\,\varepsilon_0} =$

$= (\varepsilon_0, T) \times \Omega_{\varepsilon_0})$ $\rho(x)$ — расстояние от точки x до S. Введем пространство $L_1^{(\beta,\gamma,q)}(Q_T)$ функций, для которых конечна норма

$$\{u\}_{Q_T;\,\beta,\,\gamma} = \iiint\limits_{Q_T} M\,[(t^\nu + \rho(x)^m)^q]\,M\,[t^\beta]\,M\,[\rho(x)^\gamma]\,|u(t,x)|\,dt\,dx.$$

С помощью теорем 1, 3 устанавливается

Теорема 4. *Выполнены условия* A, B_1, C_1, E_1 *в* $\overline{Q}_T$; *условия* $B_{3,\beta}$, $C_{3,\beta}$ *в* $\overline{Q}_{\varepsilon_0}$; $B_5^{(\gamma)}$, $C_5^{(\gamma)}$ *в* $\overline{Q}_T/Q_{(\varepsilon_0,T),\varepsilon_0}$; $B_5^{(\gamma)}$, $C_5^{(\gamma)}$ *в* $\overline{Q}_{\varepsilon_0} \cap \{x_n \in [0, \varepsilon_0)\}$. *Если:* 1) $u(t,x)$ — *слабое решение уравнения* (1) *в* Q_T; 2) $f(t,x) \in L_1^{(\beta,\gamma;0)}(Q_T)$; 3) $u^-(t,x) \in L_1^{(\beta-\nu,\gamma-m;1)}(Q_T)$, *то* $u(t,x) \in L_1^{(\beta-\nu,\gamma-m,1)}(Q_{T_1})$ *для любого* $T_1 < T$ *и справедлива оценка*

$$\{u\}_{Q_{T_1};\,\beta-\nu,\,\gamma-m;\,1} \leqslant \lambda_4\,(\{u\}_{Q_{(\varepsilon_0,T)};\,\varepsilon_0,\,0,\,0;\,0} + \{u^-\}_{Q_T;\,\beta-\nu,\,\gamma-m;\,1} + \{f\}_{Q_T;\,\beta,\,\gamma;\,0}),$$

λ_4 *зависит лишь от* λ_2 (*из теоремы* 3), ε_0, $T - T_1$.

С помощью теорем 1, 3 устанавливаются предложения о росте решений, определенных в неограниченном цилиндре (при этом коэффициенты могут расти с ростом пространственных координат), обобщающие и усиливающие результаты, изложенные в (1). Это позволяет, в частности, на основании обычных теорем единственности устанавливать теоремы о совпадении решений с одинаковыми начальными условиями при оценках их отрицательных компонент.

4. О решениях в бесконечной (по t) трубе. На основании теоремы 2 устанавливается

Теорема 5. *Выполнены условия* A, E_1, $B_4^{(\alpha)}$, $C_4^{(\alpha)}$ *в* $\Pi_{(-\infty,0),R}$. *Если* $u(t,x)$ — *слабое решение уравнения* $\mathscr{L}u = 0$ *в* $\Pi_{(-\infty,0),R}$, $\langle u\rangle_{(-1,0),R;\,\alpha-m} < M_1$; $\langle u^-\rangle_{(t,0),R;\,\alpha-m} \leqslant M_2 e^{c|t|}$, $t < 0$, *то*

$$\langle u\rangle_{(t,0),R;\,\alpha-m} \leqslant K_1(c,\lambda_2)\,(M_1 + M_2)\,e^{(C+\ln 2\lambda_2/t_0)|t|},$$

λ_2, t_0 *из теоремы* 2.

Если коэффициенты $P_0(t, x; \sigma^p_{n+1}, \sigma)$ вещественны, то при достаточно большом α все условия теоремы 5 сводятся к его эллиптичности. Если $P_0(0,\sigma)$ — эллиптический многочлен, то эллиптичность $P_0(\sigma^p_{n+1}, \sigma)$ не только достаточна, но и необходима для того, чтобы положительное решение уравнения (1) со старшей группой членов могло расти не быстрее $e^{c|t|}$ при $t \to -\infty$.

5. Вырождающиеся уравнения. Все теоремы остаются справедливыми для вырождающихся уравнений. Вспомогательные функции и методика доказательства те же. Алгебраические условия выводятся аналогичным образом. Запишем для иллюстрации конструкцию уравнения в случае вырождения на гиперплоскости. Оператор $\mathscr{L}^*$ предполагается таким:

$$\mathscr{L}^* = \sum_{j=0}^{m} t^{-\frac{j}{p}} \sum_{k_0 p + |k| = m-j} a_{k_0 k}(t,x) \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} D_x^k + P_1 \equiv \sum_{j=0}^{m} t^{-\frac{j}{p}} P_{0j} + P_1,$$

$a_{k_0 k}(t,x)$ ограничены, коэффициенты многочлена P_1 обладают свойством: $b_{k_0 k}(t,x)\, t^{(m-|k_0 k|)/p - k_0 - \varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$, ограничены. Основной многочлен

$$Q_{0\beta} = \sum_{\mu=0}^{m} \beta^{-j/p} \prod_{s=1}^{\mu-1} \left(1 - \frac{s}{\beta}\right) \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu}{\partial \lambda^\mu} P_{0j}\,|_{\lambda=0}\,\sigma_{n+1}^{p\mu+j}.$$

Киевский политехнический институт
им. 50-летия Великой Октябрьской
социалистической революции

Поступило
23 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, ДАН, 184, № 5 (1969); 189, № 3 (1969). [2] В. А. Солонников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 83 (1965).